



FEDEA
FUNDACIÓN DE ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA

JORGE JUAN, 46
28001 MADRID
TELS. 435 04 01/91
FAX: 577 95 75

VALORACIÓN DEL ECU CESTA-DURA (ECD) EN UN MODELO DE n PAÍSES*

por

Miguel González Sardinero**

Documento de Trabajo 92-13

Diciembre 1992

- * El autor agradece las valiosas ideas aportadas por Luis Mañas y Juan Pérez-Campanero, así como la colaboración y hospitalidad de todo el personal de FEDEA.
- ** Departamento de opciones y futuros, Argentaria, S.V.B.. Este trabajo se realizó cuando el autor trabajaba en FEDEA.

RESUMEN

En Mañas (1991), se establecen una serie de resultados sobre el ECU cesta-dura mediante la utilización de un modelo con dos países y dos períodos. El ánimo de este trabajo es mostrar que dichos resultados siguen siendo válidos en un modelo para "n" países, lo cual podría simular de forma más real el entorno comunitario.

Para este nuevo desarrollo del modelo será necesario un planteamiento más global de lo que es un ECU duro, necesario para entender como funciona su dinámica con n países. Sin embargo, el punto fundamental radica en la utilización de un tipo de opciones muy especial ("opciones sobre el máximo") que permitirán, en este caso más general, realizar la cobertura de los de los beneficios del banco utilizado en el modelo.

1. NOTACIÓN Y SUPUESTOS

Toda la notación que proponemos va en la línea del trabajo (Mañas, 1991), modificada, sin embargo, por la existencia de n países con los consiguientes tipos de cambio respectivos.

Supondremos, por tanto, que hay dos períodos ($t=0,1$) y " n " monedas. El ECD se define como la cesta que incluye W_j^t unidades de la moneda j ($j=1, \dots, n$) en el momento t .

El tipo de mercado entre la moneda h y la moneda j (en unidades de moneda h por unidad de moneda j) se representaría por T_{hj}^t .

Por razones únicamente de simplicidad y puesto que no afecta al desarrollo del modelo supondremos que el tipo de cambio entre dos monedas es igual a su paridad bilateral en el SME.

Por i_j ($j=1, \dots, n$) denotaremos los tipos de interés de las distintas monedas.

Así, los tipos de cambio de las distintas monedas con el ECU vendrán dados por

$$T_{kE}^t = \sum_{j=1}^n W_j^t T_{kj}^t \quad (t=0,1)$$

Supongamos ahora que al pasar del período cero al uno hay un realineamiento de las distintas monedas. Veamos cómo reaccionaría el sistema para que el ECU fuera un "ECU - duro".

Para ello la idea fundamental es que entre n monedas puede haber muchos cambios de paridades, pero entre el período cero y el uno es seguro que hay una moneda

que no se devalúa con respecto a ninguna de las demás. Este es un hecho intuitivo económicamente y con una sencilla comprobación analítica.

Imaginemos que sea la moneda 1 la que no se devalúa con respecto a ninguna de las demás. Entonces $T_{j1}^1 = R_j T_{j1}^0$ ($j=2, \dots, n$) con $R_j \geq 1$

Definiríamos entonces $W_j^1 = R_j W_j^0$, con $R_1=1$, es decir, las nuevas

ponderaciones de las monedas en el ECU serán $\{W_j^1\}_{j=1}^n$.

Comprobemos ahora que con estas nuevas ponderaciones el ECU es un "ECU duro", es decir, que el peso que tiene cada moneda en la cesta se mantiene constante.

$$T_{kE}^1 = \sum_{j=1}^n W_j^1 T_{kj}^1$$

$$\text{pero } T_{kj}^1 = T_{k1}^1 \cdot T_{1j}^1 = T_{k1}^1 / T_{j1}^1 = R_k T_{k1}^0 / R_j T_{j1}^0 = R_k / R_j T_{kj}^0$$

$$\text{Por tanto } T_{kE}^1 = \sum_{j=1}^n W_j^1 T_{kj}^1 = \sum_{j=1}^n W_j^1 R_k / R_j T_{kj}^0 = \sum_{j=1}^n W_j^0 R_j R_k / R_j T_{kj}^0 =$$

$$= \sum_{j=1}^n W_j^0 R_k T_{kj}^0, \text{ pues } W_j^1 = R_j W_j^0, \text{ y esto es } R_k \left(\sum_{j=1}^n W_j^0 T_{kj}^0 \right) = R_k T_{kE}^0$$

Con esto, la proporción de la moneda k-ésima ($1 < k \leq n$) en el ECU sería

$$\frac{W_k^1}{W_k^1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n W_j^1 T_{kj}^1} = \frac{W_k^1}{T_{kE}^1} = \frac{W_k^0}{T_{kE}^0}$$

Así vemos que independientemente de las fluctuaciones de las monedas, el peso de cada una en el ECU-duro se mantiene constante del período cero al uno.

Observemos que la moneda uno, que es la que no se devalúa con respecto a ninguna otra ($R_1 = 1$), no modifica su tipo de cambio con respecto al ECU ($T_{1E}^1 = T_{1E}^0$).

Al menos, el resto de las monedas se devalúan con respecto al ECU ($T_{jE}^1 \leq T_{jE}^0$, menor estricto pues $R_j > 1$ para $j=2, \dots, n$) para mantener un peso constante en el ECU-duro¹.

2. PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN DEL BANCO CON RIESGO

Supongamos que un banco cualquiera recibe 1 ECU de un inversor en el período cero. El inversor entrega moneda nacional equivalente a un ECU en $t=0$. El banco invierte este ECU en las distintas monedas, en una proporción h_j en cada una $\sum_{j=1}^n h_j = 1$,

durante un período.

Así, en el período 1 el banco tendrá un flujo de ingresos en ECUS.

$$I = h_1 (1+i_1) (T_{1E}^0/T_{1E}^1) + \dots + h_j (1+i_j) (T_{jE}^0/T_{jE}^1) + \dots + \dots + h_n (1+i_n) (T_{nE}^0/T_{nE}^1)$$

Igualmente el banco tendrá que reembolsar $1+i_E$ al inversor.

¹En realidad, siempre existe una moneda del sistema que no se devalúa, pero, sin embargo, podrían existir más de una moneda con esta característica. En este caso se elige una de ellas; para todas ellas se cumplirá que su R_j asociado será la unidad. Aunque supongamos, por simplicidad de notación que todas las monedas salvo una se devalúan con respecto a alguna otra, nuestro razonamiento es totalmente válido en el caso más general.

Teniendo en cuenta las expresiones que hallamos en la sección anterior, $T_{jE}^1/T_{jE}^0 = R_j$, la función de beneficios para el banco en ECUS será:

$$B = h_1(1+i_1) 1/R_1 + \dots + h_j(1+i_j) 1/R_j + \dots + h_n(1+i_n) 1/R_n - (1+i_E)$$

donde $R_j=1$ para los j para los que la moneda no se ha devaluado con respecto a ninguna otra. Para aquellos j en que sí se ha devaluado, $R_j > 1$.

Escrito de forma más amplia, lo anterior sería:

$$B = h_1 (1 + i_1) + h_2 (1 + i_2) 1/R_2 + \dots + h_n (1 + i_n) 1/R_n - (1 + i_E)$$

si la moneda uno no se ha devaluado respecto a ninguna otra.

$$B = h_1 (1 + i_1) 1/R_1 + h_2 (1 + i_2) + \dots + h_n (1 + i_n) 1/R_n - (1 + i_E)$$

si es la moneda dos la que no se ha devaluado

.....

$$B = h_1 (1 + i_1) 1/R_1 + h_2 (1 + i_2) 1/R_2 \dots, + h_{n-1} (1 + i_{n-1}) 1/R_{n-1} + h_n (1 + i_n) - (1 + i_E)$$

si es la n -ésima moneda la que no se ha devaluado.

3. COBERTURA CON OPCIONES Y FUNCIÓN DE BENEFICIO SIN RIESGO: OPCIONES SOBRE EL MÁXIMO.

Si observamos la función de beneficios obtenida en la sección 2, vemos que esta decrece en un término cuando una determinada moneda se devalúa frente a alguna otra. Este riesgo de tipo de cambio se puede cubrir mediante el uso de opciones. Sin embargo, en nuestro caso no queremos tan sólo cubrir la posible devaluación de una moneda frente a otra como en Mañas (1991), sino frente a un grupo de monedas. Para ello es necesario el uso de opciones sobre el máximo.

Básicamente, dados n activos con precios $S_1, \dots, S_n$, y un precio de ejercicio K , una opción sobre el máximo es un activo que compramos en t , y que nos da derecho en T a comprar por K cualquiera de los n activos. Así el valor de la opción en T será,

$$C_T = \text{Max} \left\{ \left(\text{Max}_{j=1}^n \{S_{jT}\} - K, \dots, 0 \right) \right\}, \text{ donde } S_{jT} \text{ es el precio del activo } j$$

en la fecha de vencimiento T de la opción².

En nuestro caso la cobertura será la siguiente: El banco tendrá que contratar n opciones sobre el máximo, para cubrir cada una de las posibles devaluaciones de las distintas monedas frente a todas las demás.

En concreto la opción j -ésima pagará en $t=1$

$$C_j = \begin{cases} \left(\text{Max}_k \left\{ \frac{T_{jk}^1}{T_{jk}^0} \right\} - 1 \right) \frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0} \text{ ECUS} & \text{si la moneda } j \text{ se ha devaluado respecto de alguna otra} \\ 0 & \text{si la moneda } j \text{ no se ha devaluado respecto de ninguna otra} \end{cases}$$

Ahora bien, como vimos en la sección 1 $T_{Ek}^1/T_{Ek}^0 = 1/R_k$ donde $R_k = \frac{T_{kj}^1}{T_{kj}^0}$

si j es la moneda que no se ha devaluado respecto de ninguna.

Igualmente, en este caso $\text{Max}_k \frac{T_{\ell k}^1}{T_{\ell K}^0} = \frac{T_{\ell j}^1}{T_{\ell j}^0}$, es decir, si la moneda j es la que no se ha devaluado respecto a ninguna de las otras, entonces $\text{Max}_k \left\{ \frac{T_{\ell k}^1}{T_{\ell K}^0} \right\} = \frac{T_{\ell j}^1}{T_{\ell j}^0}$. Este

es un hecho intuitivo que se demuestra inmediatamente:

²Para una información mas detallada sobre este tipo de opciones, véanse Stulz (1982) y Johnson (1987).

$$\text{Si } \frac{T_{\ell j}^1}{T_{\ell j}^0} < \frac{T_{\ell r}^1}{T_{\ell r}^0}, \text{ entonces } \frac{T_{\ell j}^1}{T_{\ell r}^1} < \frac{T_{\ell j}^0}{T_{\ell r}^0}, \text{ y así } T_{rj}^1 < T_{rj}^0, \text{ en contra de}$$

la hipótesis de que la moneda j no se ha devaluado respecto de ninguna otra.

$$\text{Así } C_j = \begin{cases} \left(\frac{R_j - 1}{R_j} \right) & \text{si la moneda j se ha devaluado respecto de alguna otra} \\ 0 & \text{si la moneda no se ha devaluado} \end{cases}$$

El banco cubrirá el valor de su inversión por medio de n opciones sobre el máximo. El pago de las primas por la compra de opciones se realiza en el momento inicial, y así el banco no invierte 1 ECU, sino (1-G) ECUS, donde G es el gasto en opciones de compra sobre el máximo.

El gasto total en opciones será $G = N_1 C_1 + \dots + N_n C_n$, donde N_j es el número de opciones sobre el máximo con base la moneda j-ésima.

Por tanto, la función de beneficio será la siguiente:

- Si la moneda que no se ha devaluado respecto de ninguna es la primera entonces,

$$B = \left[h_1 (1+i_1) + h_2 (1+i_2) \frac{1}{R_2} + \dots + h_n (1+i_n) \frac{1}{R_n} \right] (1 - G)$$

$$+ N_2 \left(\frac{R_2 - 1}{R_2} \right) + \dots + N_n \left(\frac{R_n - 1}{R_n} \right) - (1+i_E)$$

.....

- Si la moneda que no se ha devaluado es la j-ésima.

$$\begin{aligned}
B = & \left[h_1(1+i_1) \frac{1}{R_1} + h_2(1+i_2) \frac{1}{R_2} + \dots + h_j(1+i_j) \frac{1}{R_j} + \dots + h_n(1+i_n) \frac{1}{R_n} \right] (1-G) \\
& + N_1 \left(\frac{R_1-1}{R_1} \right) + \dots + N_{j-1} \left(\frac{R_{j-1}-1}{R_{j-1}} \right) + N_{j+1} \left(\frac{R_{j+1}-1}{R_{j+1}} \right) + \dots \\
& + N_n \left(\frac{R_n-1}{R_n} \right) - (1+i_E) \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

- Si la moneda que no se ha devaluado es la n-ésima.

$$\begin{aligned}
B = & \left[h_1(1+i_1) \frac{1}{R_1} + \dots + h_{n-1} (1+i_{n-1}) \frac{1}{R_{n-1}} + h_n(1+i_1) \right] (1-G) \\
& + N_1 \left(\frac{R_1-1}{R_1} \right) + \dots + N_{n-1} \left(\frac{R_{n-1}-1}{R_{n-1}} \right) - (1+i_E)
\end{aligned}$$

Para que no haya riesgo, los coeficientes que acompañan a los parámetros $\{1/R_j\}_{j=1}^n$ han de ser cero.

Por ejemplo de la primera ecuación obtenemos:

$$(1-G) h_2 (1 + i_2) - N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = h_2 (1 + i_2) (1-G)$$

.....

$$(1-G) h_n (1 + i_n) - N_n = 0 \quad \Rightarrow \quad N_n = h_n (1 + i_n) (1-G)$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$(1-G) h_1 (1 + i_1) - N_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = h_1 (1 + i_1) (1-G)$$

El resto de las soluciones que se obtienen al igualar a cero los coeficientes no son sino los anteriores, con lo cual el sistema es compatible y tenemos hallado el número de opciones necesarias en función del gasto total en opciones G .

A continuación demostramos que las expresiones para los números de opciones necesarios que se obtienen son

$$N_j = \frac{h_j (1+i_j)}{1 + h_1 (1+i_1) C_1 + h_2 (1+i_2) C_2 + \dots + h_n (1+i_n) C_n} \quad j = 1, \dots, n$$

Con notación compacta.

$$N_j = \frac{h_j (1 + i_j)}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j} \quad j = 1, \dots, n$$

Recordemos que habíamos obtenido, las expresiones

$$N_j = h_j (1 + i_j) (1 - G) \quad j = 1, \dots, n$$

donde N_j es el número de opciones call de precio C_j y G es el gasto total en opciones y así

$$G = \sum_{j=1}^n N_j C_j .$$

Para despejar N_1 , operaremos de la siguiente forma:

$$\text{Para cada } j \ (j=1, \dots, n), \quad \frac{N_j}{N_1} = \frac{h_j (1 + i_j)}{h_1 (1 + i_1)} = a_j$$

$$\text{Así el gasto } G = \sum_{j=1}^n N_j C_j = N_1 \left(C_1 + \sum_{j=2}^n \frac{N_j}{N_1} C_j \right) = N_1 \left(C_1 + \sum_{j=2}^n a_j C_j \right).$$

$$\text{Por tanto } N_1 = h_1 (1 + i_1) (1 - G) = h_1 (1 + i_1) \left[1 - N_1 \left(C_1 + \sum_{j=2}^n a_j C_j \right) \right].$$

$$\text{De aquí } h_1 (1 + i_1) = N_1 \left[h_1 (1 + i_1) C_1 + \sum_{j=2}^n \frac{h_j (1 + i_j) C_j}{h_1 (1 + i_1)} h_1 (1 + i_1) \right].$$

$$\text{Por consiguiente } N_1 = \frac{h_1 (1 + i_1)}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j}.$$

De la misma forma demostraríamos que

$$N_k = \frac{h_k (1 + i_k)}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j} \quad \text{para } j = 2, \dots, n.,$$

que son las expresiones del número de opciones necesarias para que el beneficio del banco carezca de riesgo.

Por tanto, sustituyendo estas expresiones en la función de beneficio, la función de beneficio sin riesgo sería:

$$\begin{aligned} B &= (1 - G) (h_1 (1 + i_1)) + \sum_{k=2}^n N_k - (1 + i_E) = (1 - \sum_{j=1}^n C_j N_j) (h_1 (1 + i_1)) + \\ &+ \sum_{k=2}^n \frac{h_k (1 + i_k)}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j} - (1 + i_E) = h_1 (1 + i_1) \left[1 - \sum_{k=1}^n C_k \left(\frac{h_k (1 + i_k)}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sum_{j=2}^n h_j (1+i_j)}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1+i_j) C_j} - (1 + i_E) = \frac{\sum_{j=1}^n h_j (1+i_j)}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1+i_j) C_j} - (1+i_E), \text{ que es la expresión}$$

de la función de beneficios sin riesgo para el banco, una vez incorporado el número de opciones necesario a la inversión.

Por construcción, esta función de beneficios es independiente del realineamiento $\{R_j\}_{j=1}^n$ de los tipos de cambio.

4. VALORACIÓN FINANCIERA DEL ECD

En la sección anterior construimos, mediante el uso de opciones sobre el máximo, una función de beneficios para el banco que no dependía de los realineamientos $\{R_j\}_{j=1}^n$.

Como no depende de los realineamientos, podemos dar a estos un valor igual a uno, y así sustituyendo en las expresiones anteriores de la función de beneficio, ésta toma la siguiente forma:

$$B(h, i_E) = [1 - G(h)] \left[\sum_{j=1}^n h_j (1+i_j) \right] - (1+i_E), \text{ donde } h_j \geq 0, \sum_{j=1}^n h_j = 1, \text{ y } h = (h_1, \dots, h_n)$$

La siguiente pregunta que nos surge es cual es la dependencia de la función de beneficios del banco respecto de su política de inversión. Es decir, ¿Cual es la política de inversión en las distintas monedas que reporta mayores beneficios para el banco?. Aunque la intuición pudiera dar a entender conclusiones como que la estrategia óptima es invertir todo el ECU en la moneda más fuerte, o en una media ponderada de las distintas monedas, nuestro resultado, demostrado a continuación, es que la función de beneficios $B(h, i_E)$ no

depende de h , y por tanto la política del activo es irrelevante: Así, todas las estrategias de inversión conducen al mismo beneficio.

Demostraremos que la función de beneficio no depende del vector h de proporciones de las distintas monedas de la cesta en el ECU, o lo que es lo mismo, que el beneficio del banco no depende de la política de inversión.

El primer paso será establecer una determinada "put-call parity" para opciones sobre el máximo.

Recordemos que la opción C_j paga en el vencimiento.

$$\text{Max} \left\{ \text{Max}_k \left\{ \frac{T_{jk}^1}{T_{jk}^0} \right\} - 1, 0 \right\} \frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0}$$

Observemos que en la expresión anterior, cómo $\text{Max}_k \frac{T_{jk}^1}{T_{jk}^0} \geq 1$, el cero se puede omitir, y lo que realmente paga la opción es $\left(\frac{T_{j\ell}^1}{T_{j\ell}^0} - 1 \right) \frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0}$, que es siempre mayor

o igual que cero si ℓ es la moneda que no se ha devaluado respecto de ninguna.

Imaginemos ahora que tenemos $\frac{1}{1 + i_j}$ ECUS, donde j es una de las monedas

de la cesta. Si cambiamos a la moneda j en $t=0$, tendremos $\frac{1}{1 + i_j} T_{jE}^0$. Si esto lo

invertimos en la moneda j , en $t=1$ obtendremos T_{jE}^0 unidades de la moneda j , que convertidos en ECUS serán $T_{jE}^0 \cdot T_{Ej}^1 = \frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0}$. Por tanto, a una remuneración $\frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0}$ en

$t=1$, corresponde un inversión inicial de $\frac{1}{1 + i_j}$ ECUS, para cualquier moneda de la

cesta.

Con todo ello, consideramos ahora la siguiente expresión, suponiendo que la moneda que no se ha devaluado es una moneda ℓ cualquiera.

$$\frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0} - \frac{T_{Ek}^1}{T_{Ek}^0} + \left(\frac{T_{j\ell}^1}{T_{j\ell}^0} - 1 \right) \frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0} - \left(\frac{T_{k\ell}^1}{T_{k\ell}^0} - 1 \right) \frac{T_{Ek}^1}{T_{Ek}^0}$$

Los dos primeros términos corresponden al resultado en $t=1$ de una estrategia de inversión/financiación como las que acabamos de describir, mientras que los dos últimos son el resultado en $t=1$ de la compra/venta de opciones en $t=0$.

Si operamos la expresión, esta sería.

$$\frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0} - \frac{T_{Ek}^1}{T_{Ek}^0} + \frac{T_{E\ell}^1}{T_{E\ell}^0} - \frac{T_{Ej}^1}{T_{Ej}^0} - \frac{T_{E\ell}^1}{T_{E\ell}^0} + \frac{T_{Ek}^1}{T_{Ek}^0} = 0$$

Pero en condiciones de ausencia de arbitraje, una estrategia de inversión que da beneficio cero en $t=1$, debería tener gasto cero en $t=0$. Por tanto se ha de cumplir la siguiente "put-call parity" para opciones sobre el máximo para tipos de cambio:

$$\text{Para cualesquiera índices } j, k \quad \frac{1}{1+i_j} - \frac{1}{1+i_k} + C_j - C_k = 0, \text{ con lo que}$$

queda establecida la relación deseada entre las opciones sobre el máximo.

Demostraremos ahora el resultado anunciado de que función de beneficios no depende del vector de ponderaciones h .

La expresión que obteníamos para la función de beneficio era la siguiente (salvo el término $-(1+i_E)$, que claramente no depende de h).

$$B(i, h) = \frac{\sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j)}{1 + \sum_{j=1}^n C_j h_j (1 + i_j)}, \text{ con } i = (i_1, \dots, i_n) \text{ vector de tipos de interés, y}$$

$h = (h_1, \dots, h_n)$ vector de ponderaciones (y así $\sum_{j=1}^n h_j = 1$).

Como $\sum_{j=1}^n h_j = 1$, sustituiremos $h_n = 1 - h_1 - \dots - h_{n-1}$ en la función de

beneficio, y demostraremos que $\frac{\partial B}{\partial h_j}$ es una función nula para cualesquiera valores del

vector de ponderaciones h .

$$\text{Así } B(i, h) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} h_j (1 + i_j) + (1 - h_1 - \dots - h_{n-1}) (1 + i_n)}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} C_j h_j (1 + i_j) + C_n (1 - h_1 - \dots - h_{n-1}) (1 + i_n)}$$

Para probar que $\frac{\partial B}{\partial h_k}$ es nula, bastará ver su numerador (NUM $\frac{\partial B}{\partial h_k}$) es

constantemente cero.

Pero se cumple

$$\begin{aligned} & [(1 + i_k) - (1 + i_n)] [1 + C_n (1 + i_n)] - [C_k (1 + i_k) - C_n (1 + i_n)] (1 + i_n) = \\ & (1 + i_k) - (1 + i_n) + C_n (1 + i_k) (1 + i_n) - C_n (1 + i_n)^2 - C_k (1 + i_k) (1 + i_n) + C_n (1 + i_n)^2 = \\ & (1 + i_k) - (1 + i_n) + C_n (1 + i_k) (1 + i_n) - C_k (1 + i_k) (1 + i_n) = \left(\frac{1}{1 + i_n} - \frac{1}{1 + i_k} + C_n - C_k \right) (1 + i_k) (1 + i_n) = 0 \end{aligned}$$

al dividir por $(1+i_k)(1+i_n)$ toda la expresión y aplicar la put-call parity demostrada para opciones sobre el máximo de tipos de cambio.

El término que acompañaría a h_j en $\left(\text{NUM} \frac{\partial B}{\partial h_k} \right)$ sería $[(1+i_k)-(1+i_n)]$

$$\begin{aligned} & [C_j(1+i_j) - (C_n(1+i_n))] - [C_k(1+i_k) - C_n(1+i_n)] [(1+i_j) - (1+i_n)] = C_j(1+i_j)(1+i_k) - \\ & C_n(1+i_n)(1+i_k) - C_j(1+i_j)(1+i_n) + C_n(1+i_n)^2 - C_k(1+i_k)(1+i_j) + C_k(1+i_k)(1+i_n) + \\ & C_n(1+i_n)(1+i_j) - C_n(1+i_n)^2 = (1+i_j)(1+i_k)(C_j-C_k) + (1+i_k)(1+i_n)(C_k-C_n) + \\ & (1+i_j)(1+i_n)(C_n-C_j), \end{aligned}$$

que aplicando la "put-call" parity demostrada a los tres términos consecutivos, se conviene en

$$\begin{aligned} & (1+i_j)(1+i_k) \left[\frac{1}{1+i_k} - \frac{1}{1+i_j} \right] + (1+i_k)(1+i_n) \left[\frac{1}{1+i_n} - \frac{1}{1+i_k} \right] + \\ & (1+i_j)(1+i_n) \left[\frac{1}{1+i_j} - \frac{1}{1+i_n} \right] = (1+i_j) - (1+i_k) + (1+i_k) - (1+i_n) + (1+i_n) - (1+i_j) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto el término que acompañan a h_j en $\text{NUM} \left(\frac{\partial B}{\partial h_k} \right)$ es nulo, y esto

para $1 \leq j, k \leq n-1$. Así la derivada parcial de la función de beneficios respecto de cualquier ponderación es nula para cualquier valor del vector de ponderaciones $h = (h_1, \dots, h_n)$, y por tanto la función de beneficios del banco no depende de las proporciones de inversión, en las distintas monedas, que componen la cesta.

Para valorar el ECU, tendremos que suponer que no hay posibilidades de arbitraje, y eso nos lleva a considerar que los beneficios de nuestro banco, que realiza una actividad meramente especulativa y sin riesgo han de ser nulos.

Así

$$1 + i_E = [1 - G(h)] \left[\sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) \right]$$

Cómo además el beneficio no dependía de la política de inversión, dada por $h = (h_1, \dots, h_n)$,

$$\begin{aligned} 1 + i_E &= [1 - G((1, 0, \dots, 0))] (1 + i_1) = \dots = [1 - G((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))] (1 + i_j) = \\ &= \dots = [1 - G((0, \dots, 0, 1))] (1 + i_n) \end{aligned}$$

Ahora, según el valor $G(h)$ hallado en la sección 3,

$$G(h) = \sum_{j=1}^n N_j C_j = \frac{\sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j} \quad \text{por tanto,} \quad 1 - G(h) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n h_j (1 + i_j) C_j}$$

Como la igualdad anterior la podemos valorar para cualquier vector de inversiones $h = (h_1, \dots, h_n)$ ($h_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^n h_j = 1$).

$$1 + i_E = \frac{1 + i_j}{1 + (1 + i_j) C_j} \quad j = 1, \dots, n,$$

De estas igualdades se desprenden dos conclusiones muy importantes.

- a) El ECU cesta-dura es un activo sintético, cuya rentabilidad es función de variables observables en el mercado, como los tipos de interés de las distintas monedas del SME y las primas de las opciones sobre el

máximo. Por tanto el ECU no es una moneda "original", sino que es un instrumento financiero relativamente sofisticado.

- b) Observando las expresiones deducimos que el tipo de interés del ECU (i_E) es menor que el tipo de interés de todas las monedas del sistema, puesto que los denominadores de las distintas expresiones son siempre mayores que uno. Por tanto el ECU cesta-dura es una moneda más fuerte que todas las monedas que componen la cesta. Esto va contra algunas intuiciones habituales, como que la fortaleza del ECU sería la de la moneda más fuerte del SME, o una media de ellas.

5. ESTÁTICA COMPARATIVA

Derivaremos a continuación otros interesantes resultados que completan y confirman la relación del ECU con las monedas de la cesta.

Por simplicidad de cálculo, éste se efectuará en tiempo continuo.

Así podemos reescribir la última ecuación referente al tipo de interés del ECU como,

$$\begin{aligned} \exp(i_E) &= [1 - G((1, 0, \dots, 0))] \exp(i_1) = \dots = [1 - G((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))] \exp(i_j) = \\ &= \dots = [1 - G((0, \dots, 0, 1))] \exp(i_n) \end{aligned}$$

que tomando logaritmos se convierte en ,

$$\begin{aligned} i_E &= i_1 + \ln [1 - G((1, 0, \dots, 0))] = \dots = i_j + \ln [1 - G((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))] = \\ &= \dots = i_n + \ln [1 - G((0, \dots, 0, 1))] \end{aligned}$$

En la expresión anterior observamos cómo el tipo de interés del ECU es igual al tipo de interés de cada una de las monedas menos un elemento de opción. Obsérvese que $G(h) \geq 0$ y así los términos logarítmicos son menores o iguales que la unidad.

Sustituyendo $1-G(h)$ por su valor, obtenemos, sustituyendo h por cada uno de los n valores adecuados,

$$i_E = i_j - \ln[1 + C_j \exp(i_j)] \quad j = 1, \dots, n$$

El punto fundamental para llegar a nuestros resultados de estática comparativa es, a partir de aquí, un complejo tratamiento de las opciones sobre el máximo $C_1, \dots, C_n$. Este se realizará en el Apéndice, mientras que en esta sección nos limitaremos a exponer los resultados.

El primero de ellos es que a la vista de las expresiones anteriores, el tipo de interés del ECU cesta-dura depende únicamente de los tipos de interés de las monedas que componen la cesta, y de la matriz de covarianzas entre los distintos tipos de cambio, ya que éste aparece en los términos de opción $C_1, \dots, C_n$. En cualquier caso, todas ellas son variables identificables en el mercado.

Lo fundamental en estática comparativa es conocer como varía el tipo de interés del ECU ante variaciones de las distintas monedas. Los resultados que se obtienen son los siguientes.

$$1) \quad \frac{\partial i_E}{\partial i_j} = \frac{\exp(-i_j) N_j}{\sum_{k=1}^n \exp(-i_k) N_k} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

donde N_j es una función de distribución normal n -dimensional aplicada en un determinado valor X_j ($N_j = N(X_j)$, donde X_j será un vector de n componentes), actualizada por $\exp(-i_j)$, así cada N_j cumple $0 \leq N_j \leq 1$.

$$2) \quad \text{Como consecuencia del anterior resultado 1), } \sum_{j=1}^n \frac{\partial i_E}{\partial i_j} = 1.$$

Así, el resultado uno nos dice que ante una subida de los tipos de interés de algunas monedas que componen la cesta, el tipo de interés del ECU también subirá, pero en una cuantía menor, e igualmente ocurrirá ante un eventual descenso de los tipos de interés, ya que expresiones de $\frac{\partial i_E}{\partial i_j}$ ($j = 1, \dots, n$) expuestas en 1) se hallan todas ellas

comprendidas entre cero y uno.

Este resultado nos viene a decir (confirmar, dados los anteriores), que el ECU duro tiene una estabilidad mayor que todas las monedas de la cesta, y su estabilidad no viene marcada por ningún tipo de muestra ponderada de las estabilidades de las monedas de la cesta.

Yendo más allá, un resultado sorprendente del análisis anterior es que el tipo de interés del ECU cesta-dura es completamente independiente de las proporciones en que entran las distintas monedas en la cesta. Por tanto, lo importante para la determinación del tipo de interés es el conjunto de las monedas que intervienen en ella, no sus ponderaciones.

El resultado 2) relaciona las reacciones del ECU ante variaciones de las distintas monedas de la cesta. Así, si el ECU sigue de cerca las variaciones de una moneda, no debiera hacerlo respecto de los demás puesto que la suma de estos recursos (que son positivos por 1) ha de ser la unidad. Es intuitivo y se puede comprobar analíticamente que el ECD seguirá más en su variaciones a las monedas más fuertes³.

³El resultado 2) ha de interpretarse cuidadosamente: El significado de $\frac{\partial i_E}{\partial i_j}$ es la respuesta del ECD a la variación de la moneda j-ésima, suponiendo que las demás se mantienen constantes. Por tanto, los seguimientos del ECD respecto de las distintas monedas a que nos referimos son individualizados. Son las variaciones del ECD frente a la de una moneda, no considerando el efecto de las restantes.

En este Apéndice estableceremos los resultados de estática comparativa en n dimensiones. Debido a que las opciones sobre el máximo obedecen a una fórmula muy complicada, la demostración efectiva se realizará para tres países, con alguna hipótesis adicional, siendo para n una demostración análoga pero con mayor dificultad de cálculo.

Por comodidad de notación supondremos que hay $n+1$ monedas indexadas por $0, 1, \dots, n$.

Partiremos de la ecuación que obteníamos para el tipo de interés del ECU en tiempo continuo.

$$\exp i_E = \frac{\exp(i_j)}{1 + \exp(i_j) C_j} = \frac{1}{\exp(-i_j) + C_j} \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n$$

A continuación reproducimos las fórmulas de Barone y Bucci (1991) para opciones sobre el máximo de tipos de cambio.

$$\begin{aligned} C_{\max} = & S_1 \exp(-i_1 T) N_n \left[d_1(S_1, X, \sigma_1^2), d_1'(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \dots, (d_1'(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2), \sum_1 \right] + \\ & + S_2 \exp(-i_2 T) N_n \left[d_1(S_2, X, \sigma_2^2), d_1'(S_2, S_1, \sigma_{21}^2), \dots, d_1'(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2), \sum_2 \right] + \\ & \dots \dots \dots \\ & + S_n \exp(-i_n T) N_n \left[d_1(S_n, X, \sigma_n^2), d_1'(S_n, S_1, \sigma_{n1}^2), \dots, d_1'(S_n, S_{n-1}, \sigma_{n-1n}^2), \sum_n \right] - \\ & - X \exp(-i_0 T) \left\{ 1 - N_n \left[-d_2(S_1, X, \sigma_1^2), -d_2(S_2, X, \sigma_2^2), \dots, -d_2(S_n, X, \sigma_n^2), \sum \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

- $N_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \Sigma_j)$ es la función de distribución normal multivariante con vector de medias cero y matriz de coeficientes de correlación Σ_j , valorada en los puntos $x_1, \dots, x_n$.

$$d_1(S_j, X, \sigma_j^2) = \left[\ln(S_j/X) + (i_0 - i_j + \frac{1}{2} \sigma_j^2) \right] / (\sigma_j \sqrt{T})$$

$$d'_1(S_j, S_k, \sigma_{jk}^2) = \left[\ln(S_j/S_k) + (i_k - i_j + \frac{1}{2} \sigma_{jk}^2) \right] / (\sigma_{jk} \sqrt{T})$$

$$\sigma_{jk}^2 = \sigma_j^2 - 2 \rho_{jk} \sigma_j \sigma_k + \sigma_k^2$$

$$d_2(S_j, X, \sigma_j^2) = \left[\ln(S_j/X) + (i_0 - i_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2) \right] / (\sigma_j \sqrt{T})$$

$$\Sigma_j = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{j1} & \rho_{j2} & \rho_{j3} & \dots & \rho_{jn} \\ \rho_{j1} & 1 & \rho_{j13} & \rho_{j14} & \dots & \rho_{j1n} \\ \rho_{j2} & \rho_{j13} & 1 & \rho_{j24} & \dots & \rho_{j2n} \\ \rho_{j3} & \rho_{j14} & \rho_{j24} & 1 & \dots & \rho_{j3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{jn} & \rho_{j1n} & \rho_{j2n} & \rho_{j3n} & \dots & 1 \end{bmatrix} = (j = 0, 1, \dots, n)$$

$$\rho_{j1k} = (\sigma_j - \rho_{jk} \sigma_k) / \sigma_{jk}$$

$$\rho_{jk\ell} = (\sigma_j^2 - \rho_{jk} \sigma_j \sigma_k - \rho_{j\ell} \sigma_j \sigma_\ell + \sigma_{k\ell} \sigma_k \sigma_\ell) / (\sigma_{jk} \sigma_{k\ell})$$

- i_j es el tipo de interés de la moneda j : ($j = 0, 1, \dots, n$)

Entonces, denotemos por,

$$N_j = S_j N_n (d_1(S_j, X, \sigma_j^2), d_1'(S_j, S_1, \sigma_{j1}^2), \dots, d_1'(S_j, S_n, \sigma_{jn}^2) \mid \sum_j)$$

para $j = 1, \dots, n$ y

$$N_0 = X \cdot N_n \left(-d_2(S_1, X, \sigma_1^2), -d_2(S_2, X, \sigma_2^2), \dots, -d_2(S_n, X, \sigma_n^2) \right)$$

En nuestro caso, tal cómo están definidas las opciones sobre el máximo de los tipos de cambio, $T, S_j, X = 1$ ($j = 1, \dots, n$). Luego las expresiones anteriores son en realidad.

$$N_j = N_j \left(d_1(\sigma_j^2), d_1'(\sigma_{j1}^2), \dots, d_1'(\sigma_{jn}^2) \mid \sum_j \right), \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$N_0 = N_0 \left(-d_2(\sigma_1^2), \dots, -d_2(\sigma_n^2) \right)$$

Entonces, $\exp i_E = [\exp -i_j + C_j]^{-1} = [\exp -i_0 + C_0]^{-1}$ y con la notación anterior.

$$C_0 = \sum_{j=1}^n \exp(-i_j) N_j - \exp(-i_0) (1 - N_0),$$

$$\text{por tanto, } \exp i_E = \left\{ \exp(-i_0) [1 - (1 - N_0)] + \sum_{j=1}^n \exp(-i_j) N_j \right\}^{-1}$$

$$\text{y } i_E = -\ln \left[\exp(-i_0) N_0 + \sum_{j=1}^n \exp(-i_j) N_j \right]$$

Derivando respecto de i_0

$$\frac{\partial i_E}{\partial i_0} = \frac{\exp(-i_0) N_0 - \exp(-i_0) \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_0}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^0}{\partial i_0} - \sum_{j=1}^n \exp(-i_j) \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^j}{\partial i_0}}{\exp(-i_0) N_0 + \sum_{j=1}^n \exp(-i_j) N_j}$$

En todos los casos $\frac{\partial x_j^0}{\partial i_0} = -\frac{1}{\sigma_j}$; $\frac{\partial x_1^j}{\partial i_0} = \frac{1}{\sigma_j}$

Queremos probar que $\frac{\partial i_E}{\partial i_0} = \frac{\exp(-i_0) N_0}{\exp(-i_0) N_0 + \sum_{j=1}^n \exp(-i_j) N_j}$

Para ello, veremos que $\exp(-i_0) \frac{\partial N_0}{\partial x_j} = \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \exp(-i_j)$

Valorando en los puntos correspondientes, y donde $x_1, \dots, x_n$ denotan las variables de los que depende la normal n -dimensional. Cuando sea necesario, detallaremos más, y denotaremos por x_k^j a la variable k -ésima de la normal j -ésima N_j .

Este cálculo es, en general, muy complicado. Lo veremos en el caso particular de $n=2$ (tres monedas) y coeficiente de correlación cero entre los tipos de cambio de las monedas uno y dos respecto de la moneda cero. Estas hipótesis se justifican sólo por razones de cálculo. Este seguirá, en el caso más general, la misma línea de argumentación que aquí presentamos, aunque con mayor número de coeficientes y por tanto mayor complejidad para obtener las expresiones deseadas de estática comparativa.

En este caso el cálculo sería el siguiente:

$$\frac{\partial N_0}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{\frac{-\left(i_0 - i_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2\right)}{\sigma_2}} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\} dy \right) dx \right)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{\frac{\left(i_2 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_{12}^2\right)}{\sigma_{12}}} \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} dy \right) dx \right)$$

donde según Barone y Bucci (19xx)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_1}{\sigma_{12}} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{12}} & 1 \end{bmatrix}$$

Por el Teorema fundamental del Cálculo Integral, las expresiones anteriores son

$$\frac{\partial N_0}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{\frac{-\left(i_0 - i_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2\right)}{\sigma_2}} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^0{}^2 + y^2) \right\} dy$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{\frac{i_2 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}}} \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^0, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} \right\} dy$$

Calculamos la matriz inversa de Σ .

El determinante de Σ será:

$$|\Sigma| = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{12}^2}; \quad |\Sigma|^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}}$$

Así,

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} & \frac{-\sigma_1 \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^2 \sigma_2^2} \\ \frac{-\sigma_1 \sigma_{12}}{\sigma_{12}^2 \sigma_2} & \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} & \frac{-\sigma_1 \sigma_{12}}{\sigma_2^2} \\ \frac{-\sigma_1 \sigma_{12}}{\sigma_2^2} & \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}; \quad (x_1^0, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1^0, y) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} & \frac{-\sigma_1 \sigma_{12}}{\sigma_2^2} \\ \frac{-\sigma_1 \sigma_{12}}{\sigma_2^2} & \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} x_1^{0\ 2} - 2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \sigma_{12} x_1^0 y + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} y^2 =$$

$$= \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} x_1^{0\ 2} + \left\{ \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} y - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1^0 \right)^2 - x_1^0 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right\} = x_1^{0\ 2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} y - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1^0 \right)^2$$

Por tanto,

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^0, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y \end{pmatrix} \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_1^{0\ 2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} y - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1^0 \right)^2 \right\}$$

y,

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{\frac{i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}}} \frac{1}{2\pi \sigma_2} \sigma_{12} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_1^0{}^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} y - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1^0 \right)^2 \right\}$$

donde, $x_1^0 = \frac{i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1}$

Hacemos ahora el cambio de variables,

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} y - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1^0 = t \quad \text{y así} \quad dy = \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}} dt$$

Los límites de integración de t serán $-\infty$ y

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} \left(\frac{i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}} \right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\frac{i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1} \right) =$$

$$= \frac{i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 - i_0 + i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_2} = \frac{i_2 - i_0 + \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1^2} \right)^2 \right\} N \left(\frac{i_2 - i_0 + \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2} \right)$$

donde N es la función de distribución de una normal $N(0, 1)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial x_1} &= \int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2}} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^2 + y^2) \right\} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2)^2}{\sigma_1^2} \right\} \int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2)^2}{\sigma_1^2} \right\} N \left(\frac{i_2 - i_0 + \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) \end{aligned}$$

Veamos ahora que, $\exp(-i_0) \frac{\partial N_0}{\partial x_1} - \exp(-i_1) \frac{\partial N_1}{\partial x_1} = 0$

Teniendo en cuenta los factores comunes que multiplican a ambos términos, es suficiente con ver que,

$$\exp(-i_0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2\right)^2}{\sigma_1^2} \right\} - \exp(-i_1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2\right)^2}{\sigma_1^2} \right\} = 0$$

Pero desarrollando, lo anterior es:

$$\begin{aligned} & \exp(-i_0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(i_0 - i_1)^2 + \frac{1}{4} \sigma_1^4 - 2(i_0 - i_1) \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1^2} \right] \right\} - \\ & - \exp(-i_1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(i_0 - i_1)^2 + \frac{1}{4} \sigma_1^4 + 2(i_0 - i_1) \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1^2} \right] \right\} = \\ & = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(i_0 - i_1)^2 + \frac{1}{4} \sigma_1^4}{\sigma_1^2} \right] \right\} \left(\exp(-i_0) \exp \left\{ +\frac{1}{2} (i_0 - i_1) \right\} - \exp(-i_1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (i_0 - i_1) \right\} \right) = \\ & = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(i_0 - i_1)^2 + \frac{1}{4} \sigma_1^4}{\sigma_1^2} \right] \right\} \left(\exp \left(-\frac{1}{2} i_0 - \frac{1}{2} i_1 \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} i_0 - \frac{1}{2} i_1 \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Veremos ahora que, $\exp(-i_0) \frac{\partial N_0}{\partial x_2} = \exp(-i_2) \frac{\partial N_2}{\partial x_1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial x_2} &= \frac{\partial N_0}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\int_{-\infty}^{y_1} \left(\int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1}} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\} dx \right) dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1}} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y_1^2) \right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right)^2 \right\} N \left(-\frac{i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1} \right) \end{aligned}$$

En este caso,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \quad |\Sigma| = 1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{12}^2}. \quad \text{Así} \quad |\Sigma|^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{12}},$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} & \frac{-\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_{12}^2 \sigma_1^2} \\ \frac{-\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_{12}^2 \sigma_1^2} & \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} & \frac{-\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} \\ \frac{-\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} & \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{\frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}}} \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^0, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} dy \right) dx \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}}} \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^0, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y \end{pmatrix} \right\} dy \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (x_1^0, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y \end{pmatrix} &= \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} x_1^{0\ 2} - 2 \frac{\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} x_1^0 y + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} y^2 = \\ &= \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} x_1^{0\ 2} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} x_1^{0\ 2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} y - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1^0 \right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{y por tanto,} \quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^0, y) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_1^{0\ 2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} y - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1^0 \right)^2 \right\}$$

Así la integral anterior es,

$$\int_{-\infty}^{\frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}}} \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_1^{02} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} y - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1^0 \right)^2 \right\} dy$$

Hacemos el cambio de variables.

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} y - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1^0 = t \quad \text{y la nueva integral se convierte en ,}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}}} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\left(i_0 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right)}{\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^2 \right\} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_1^{02} \right\} = \\ & = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{i_1 - i_0 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^2 \right\} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(i_0 - i_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right)^2}{\sigma_2^2} \right\} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(i_0 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right)^2}{\sigma_2^2} \right\} N \left(\frac{i_1 - i_0 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Se trata de ver ahora que,} \quad \exp(-i_0) \frac{\partial N_0}{\partial x_2} = \exp(-i_2) \frac{\partial N_2}{\partial x_1}$$

Prescindiendo de los factores comunes, basta ver que,

$$\exp(-i_0) \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(i_0 - i_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2)^2}{\sigma_2^2}\right\} - \exp(-i_2) \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(i_0 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2)^2}{\sigma_2^2}\right\} = 0$$

Pero esto es,

$$\begin{aligned} & \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(i_0 - i_2)^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2}{\sigma_2^2}\right\} \left[\exp(-i_0) \exp\left(+\frac{1}{2} (i_0 - i_2)\right) - \exp(-i_2) \exp\left(-\frac{1}{2} (i_0 - i_2)\right) \right] = \\ & = \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(i_0 - i_2)^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2}{\sigma_2^2}\right\} \left(\exp\left(-\frac{1}{2} i_0 - \frac{1}{2} i_2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} i_0 - \frac{1}{2} i_2\right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Así se cumple la igualdad anterior, y por tanto en el caso particular $n=2$ (tres monedas) y con tipos de cambio de dos de ellas con respecto de una tercera incorreladas se cumple que,

$$\frac{\partial i_E}{\partial i_0} = \frac{\exp(-i_0) N_0}{\exp(-i_0) N_0 + \sum_{j=1}^n \exp(-i_j) N_j}$$

$$\text{Así, } 0 < \frac{\partial i_E}{\partial i_0} < 1$$

Cómo la moneda elegida como cero puede ser cualquiera, concluimos que el tipo de interés del ECU tiene una variación menor que cualquiera de las variaciones de los tipos de interés de las monedas de la cesta que lo componen.

Para completar nuestros resultados, conozcamos $\frac{\partial i_E}{\partial i_1}$ y $\frac{\partial i_E}{\partial i_2}$

Recordemos que en el caso particular que estamos tratando ($n=0, 1, 2$ y $\rho=0$), la expresión del call según el artículo de Baronne y Bucci sería:

$$C = \exp(-i_1) N_1 \left[\frac{i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1}, \frac{i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}} | \Sigma_1 \right] + \\ \exp(-i_2) N_2 \left[\frac{i_0 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2}, \frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}} | \Sigma_2 \right] - \\ \exp(-i_0) \left(1 - N_0 \left[-\frac{\left(i_0 - i_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2\right)}{\sigma_1}, -\frac{\left(i_0 - i_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2\right)}{\sigma_2} \right] \right)$$

donde,

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_1}{\sigma_{12}} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \text{ y las funciones de distribución las}$$

demostraremos simplemente por N_1, N_2, N_0 .

$$\text{Así, si } i_E = - \ln \left\{ \exp (- i_0) N_0 + \sum_{j=1}^2 \exp (- i_j) N_j \right\}^{-1},$$

$$\frac{\partial i_E}{\partial i_1} = \frac{\exp (- i_1) N_1 - A}{\exp (- i_0) N_0 + \sum_{j=1}^2 \exp (- i_j) N_j}, \text{ con}$$

$$A = \exp (- i_1) \left(- \frac{1}{\sigma_1} \right) \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \exp (- i_1) \left(\frac{-1}{\sigma_{12}} \right) \frac{\partial N_1}{\partial x_2} + \exp (- i_2) \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \frac{1}{\sigma_{12}} + \exp (- i_0) \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{1}{\sigma_1}$$

$$\text{Hemos visto que, } - \exp (- i_1) \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \exp (- i_0) \frac{\partial N_0}{\partial x_1} = 0, \text{ por tanto}$$

el primer y el último término se anulan, y así para ver que A es cero basta ver que,

$$\exp (- i_1) \frac{\partial N_1}{\partial x_2} = \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \exp (- i_2).$$

Aplicando el Teorema del Cálculo para la derivación de integrales, y valorando en los puntos correspondientes,

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_2} = \int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1}} \frac{1}{2\pi |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} (x_1, y_1^0) \Sigma_1^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y_1^0 \end{pmatrix} \right\} dx \quad y$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_2} = \int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2}} \frac{1}{2\pi |\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} (x_1, y_1^0) \Sigma_2^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y_1^0 \end{pmatrix} \right\} dx$$

donde, $|\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}}$, $|\Sigma_2|^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{12}}$

$$\Sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} & -\sigma_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \\ -\sigma_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} & \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} & -\frac{\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} \\ -\frac{\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} & \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $(x, y_1^0) \Sigma_1^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y_1^0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} x^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} y_1^{0^2} - 2x y_1^0 \frac{\sigma_{12} \sigma_1}{\sigma_2^2} =$

$$= \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} x - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} y_1^0 \right)^2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} y_1^{0^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} y_1^{0^2} = \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} x - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} y_1^0 \right)^2 + y_1^{0^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} &= \int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2}{\sigma_1}} \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} x - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} y_1^0 \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}} \right)^2 \right\} \int_{-\infty}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^2 \right\} dt \end{aligned}$$

donde, $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} x - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} y_1^0 = t$ y así $dx = \frac{\sigma_2}{\sigma_{12}} dt$

$$y, \quad \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} \frac{\left(i_0 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2\right)}{\sigma_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\frac{i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}}\right) = t_1$$

$$\text{Así,} \quad \frac{\partial N_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2)}{\sigma_{12}^2} \right\} N(t_1)$$

De la misma forma procederemos para hallar, $\frac{\partial N_2}{\partial x_2}$.

$$(x, y_1^0) \sum_2^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y_1^0 \end{pmatrix} = (x, y_1^0) \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} & -\frac{\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} \\ -\frac{\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} & \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y_1^0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} x^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} y_1^{0^2} - \frac{2 \sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1^2} x^2 y_1^{0^2} =$$

$$= \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} x - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} y_1^0 \right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} y_1^{0^2} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} y_1^{0^2} =$$

$$= y_1^{0^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} x - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} y_1^0 \right)^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial x_2} &= \int_{-\infty}^{\frac{i_0 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2}} \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^2} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} x - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} y_1^0 \right)^2 \right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^2} \right)^2 \right\} \int_{-\infty}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^2 \right\} dt \end{aligned}$$

$$\text{con, } t = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} x - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} y_1^0, \quad \text{y así } dx = \frac{\sigma_1}{\sigma_{12}} dt$$

$$\text{y, } t_2 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \left(\frac{i_0 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(\frac{i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sigma_{12}} \right)$$

Ahora notamos que $t_1 = t_2$, pues en ambos el coeficiente que acompaña a,

$$1) \quad i_0 \text{ es } \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$2) \quad i_1 \text{ es } -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_{12}} \text{ en } t_2 \text{ y } -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2 \sigma_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2 \sigma_{12}} \text{ en } t_2$$

$$\text{pero } -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2 \sigma_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2 \sigma_{12}} = -\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2 \sigma_1 \sigma_{12}} + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2 \sigma_{12} \sigma_1} = -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_2 \sigma_1 \sigma_{12}} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 \sigma_{12}}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad i_2 \text{ es } -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 \sigma_{12}} \text{ en } t_1 \text{ y } -\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \sigma_{12}} &= -\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_{12}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_{12}} = \\ &= -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_{12}} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 \sigma_{12}} \text{ en } t_2 \end{aligned}$$

4) Los términos independientes son ambos:

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2 \sigma_1} \cdot \frac{1}{2} \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12} \sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_1 \sigma_{12}}{\sigma_2} \right) = 0 \quad \text{en } t_1, \quad y$$

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \frac{1}{2} \sigma_2^2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \sigma_{12}} \cdot \frac{1}{2} \sigma_{12}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12} \sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2 \sigma_{12}}{\sigma_1} \right) = 0 \quad \text{en } t_2$$

Así $t_1 = t_2$ y $N(t_1) = N(t_2)$.

Por tanto para verificar la igualdad, $\exp(-i_1) \frac{\partial N_1}{\partial x_2} = \exp(-i_2) \frac{\partial N_2}{\partial x_2}$,

prescindiendo de los factores comunes, es suficiente ver que,

$$\exp(-i_1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(i_2 - i_1 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2 \right)^2}{\sigma_{12}^2} \right\} = \exp(-i_2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left(i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2 \right)^2}{\sigma_{12}^2} \right\}$$

Pero desarrollando, esto es equivalente a que ,

$$\exp(-i_1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (i_2 - i_1) \right\} = \exp(-i_2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (i_1 - i_2) \right\}$$

y ambos términos son, $\exp \left\{ -\frac{1}{2} i_1 - \frac{1}{2} i_2 \right\}$.

Así hemos visto que, $\exp(-i_1) \frac{\partial N_1}{\partial x_2} = \exp(-i_2) \frac{\partial N_2}{\partial x_2}$

Por tanto, $A = 0$ y

$$\frac{\partial i_E}{\partial i_1} = \frac{\exp(-i_1) N_1}{\exp(-i_0) N_0 + \sum_{j=1}^2 \exp(-i_j) N_j}$$

Análogamente se prueba que,

$$\frac{\partial i_E}{\partial i_2} = \frac{\exp(-i_2) N_2}{\exp(-i_0) N_0 + \sum_{j=1}^2 \exp(-i_j) N_j} \quad \text{y por}$$

tanto concluimos que $\sum_{j=0}^2 \frac{\partial i_E}{\partial i_j} = 1$, que era el resultado de estática comparativa para

dos países. El resultado nos dice que i_E varía menos que i_j para cada j y que la suma de dichas variaciones porcentuales ha de ser igual a la unidad. Por tanto la variación unitaria ha de repartirse entre todas ellas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Baronne, E.; Bucci, A. (1991): "The valuation of multiple options: an application to the exchange rate market of the Italian lira", Economics and Finance Series, Center For Research in Finance -IMI Group, febrero.
- Black, F.; Scholes, M. (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, 81, pp. 637-654.
- Garman, M.B.; Kohlhagen, S.W. (1983): "Foreign currency option values", Journal of International Money and Finance, 2, pp. 231-238.
- Grabbe, J.O. (1983): "The pricing of call and put options on foreign exchange", Journal of International Money and Finance, 2, pp. 239-254.
- Hsieh, D; Mañas, L.A. (1986): "Empirical regularities in options on Deutsche Mark futures", Center for Research on Security Prices (CRSP), University of Chicago, Working paper n° 189. [Publicado en Whalley, J. (ed): Advances in Futures and Options].
- Johnson, H. (1987): "Options on the maximum or the minimum of several assets". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 22, n° 3, septiembre.
- Klein, M.; Muller, S.A. (1990): "ECU interest rates and ECU basket adjustments: an arbitrage pricing approach", CEPR Discussion Paper, n° 445, septiembre.
- Levich, R.M. (1987): "The interbank ECU market", en Levich, R.M. (ed.): ECU, European Currency Unit, Euromoney Publications PLC.
- Leyva, M.L. (1991): "Problemática de un ECU cesta fortalecido". Texto multicopiado, enero.

-
- Leyva, M.L. (1991b): "ECU actual y concepciones alternativas". Boletín Económico, Banco de España, febrero, pp. 19-34.
- Mañas, L.A. (1991): "Propuesta de endurecimiento del ECU: Valoración financiera e implicaciones económicas" en J. Pérez-Campanero (ed): España ante la Unión Económica y Monetaria en Europa, FEDEA.
- Mañas, L.A. (1988): "Dinámica de corto plazo de los tipos de cambio: Volatilidad y opciones sobre divisas". Cuadernos Económicos de ICE, nº 38.
- Margrabe, W. (1978): "The value of an option to exchange one asset for another", Jornal of Finance, vol. 23, 1, marzo.
- Pérez-Campanero, J. (1990): "El Sistema Monetario Europeo y el ECU. Descripción y funcionamiento". Cuadernos de Economía y Finanzas. FEDEA.
- Roma, A. (1990): "A model for contingent claim pricing on EMS Exchange Rates". Temì di discussione, Banco d'Italia, nº 135, mayo.
- Stulz, R.M. (1982): "Options on the minimum or the maximum of two risky assets: analysis and applications". Journal of Financial Economics, nº 10, pp. 161-185.