



FEDEA
Fundación de Estudios de Economía Aplicada

Crecimiento óptimo, depreciación endógena y subutilización del capital

por

Omar Licandro*

Luis A. Puch**

J. Ramón Ruíz Tamarit***

DOCUMENTO DE TRABAJO 99-18

Octubre, 1999

* FEDEA.

** Universidad Complutense de Madrid.

*** Universitat de València.

Los Documentos de trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. No obstante están disponibles en texto completo a través de Internet: <http://www.fedea.es/hojas/publicaciones.html#Documentos de Trabajo>

These Working Documents are distributed free of charge to University Department and other Research Centres. They are also available through Internet: <http://www.fedea.es/hojas/publicaciones.html#Documentos de Trabajo>

" CRECIMIENTO ÓPTIMO, DEPRECIACIÓN ENDÓGENA Y SUBUTILIZACIÓN DEL CAPITAL " (*)

Omar LICANDRO ^(a)

Luis A. PUCH ^(b)

J. Ramón RUIZ TAMARIT ^(c)

Agosto, 1999.

Keywords:

Control Óptimo, Costes de Mantenimiento, Depreciación y Utilización del Capital.

JEL Classification: D9, O4.

Resumen

En este artículo se estudia el equilibrio estacionario y la dinámica transicional en una economía en la que el mantenimiento de los bienes de capital deteriorados resulta costoso. Para ello se incorpora, en un modelo de crecimiento óptimo con costes de ajuste asociados a la inversión, una tecnología de mantenimiento que depende de la depreciación del capital y de su utilización. Como resultado obtenemos que la subutilización del capital es óptima. También se comprueba que la trayectoria de equilibrio es dinámicamente eficiente. En el estado estacionario la tasa de inversión pasa a determinarse simultáneamente con la tasa de depreciación endógena, lo cual permite una interpretación más relajada del problema de la convergencia condicional. A lo largo de la senda de convergencia el capital, la producción y el consumo *per capita* presentan correlación positiva, mientras que la tasa de inversión aparece inversamente relacionada con las anteriores. La tasa de depreciación y la tasa de utilización, en cambio, ofrecen un comportamiento menos definido. Estos resultados amplían el marco teórico para el análisis de dinámica comparativa en modelos de equilibrio general.

(*) Los autores agradecen la ayuda financiera recibida del Institut Valencià d'Investigacions Econòmiques (IVIE).

(a) FEDEA.

(b) *Universidad Complutense de Madrid.*

(c) *Universitat de València.* Correspondencia: Departament d'Anàlisi Econòmica. Universitat de València (Campus dels Tarongers). Avda. dels Tarongers, Edif. Departamental Oriental. 46022 VALENCIA.

Tfno.: (96) 382 82 50. Fax: (96) 382 82 49. e-mail: ramon.ruiz@uv.es

1. Introducción

La mayor parte de estudios económicos, tanto empíricos como teóricos, que analizan el proceso de acumulación de capital, adoptan como hipótesis de trabajo la exogeneidad de la depreciación. Dicha naturaleza exógena de la depreciación del capital se justifica, en primera instancia, mediante la consideración de tecnologías del tipo *putty-putty*. Además, la percepción distorsionada que habitualmente se tiene del fenómeno del deterioro del capital, como resultado de un enfoque puramente contable y no basado en una teoría sólida, ha acabado por elevar al rango de axioma la idea de una tasa de depreciación constante. Este *a priori* se manifiesta especialmente preocupante, por restrictivo, en áreas como la teoría de la inversión y la teoría del crecimiento, y en particular en relación al problema de la medición del capital.

Desde un punto de vista teórico, el problema de la variabilidad de la depreciación y su determinación endógena, en el marco de los modelos con tecnología de producción *putty-putty*, ha sido abordado en los trabajos de Escribá-Pérez y Ruiz-Tamarit (1996) y Ruiz-Tamarit (1995). En ellos se modelizan las decisiones de una empresa representativa incluyendo la tasa de depreciación entre las variables de control, desde una perspectiva de equilibrio parcial en un entorno competitivo. Para ello, se incorpora una actividad de mantenimiento de los bienes de capital que permite reducir la depreciación por deterioro. Dada una función de costes de mantenimiento, se deriva una función de depreciación de naturaleza semejante a la tradicional función de inversión que nos ofrecen los modelos q de Tobin cuando suponemos la presencia de una función de costes de ajuste. En el segundo de los artículos citados se incorporaba además, bajo la hipótesis *depreciation-in-use*, la relación existente entre la depreciación por deterioro y la utilización del capital¹. Con ello se consigue vincular la tasa de depreciación, la tasa de utilización del stock de capital y los costes de mantenimiento, en un modelo cuyo equilibrio se caracteriza por la subutilización voluntaria y óptima del capital, incluso bajo los supuestos de mercados competitivos, flexibilidad total de precios y una tecnología que permite la sustituibilidad entre los factores.

¹ Distintas formulaciones y aplicaciones de esta hipótesis se encuentran en Epstein y Denny (1980), Bischoff y Kokkelenberg (1987), Motahar (1992) y Burnside y Eichenbaum (1994).

En equilibrio general, el modelo neoclásico de crecimiento óptimo se caracteriza porque no permite la separación de las decisiones de ahorro de las familias de las decisiones de inversión de las empresas. Dicho modelo, aún cuando no se construye sobre la hipótesis de una tasa de ahorro constante, supone un comportamiento pasivo de la inversión, la cual se adapta automáticamente a las decisiones de ahorro. Uzawa (1964) supera la limitación de una oferta de inversión perfectamente elástica al incorporar al modelo estándar dos sectores: uno de bienes de consumo y otro de bienes de inversión. Abel y Blanchard (1983) supera la limitación de una demanda de inversión perfectamente elástica al incorporar al modelo estándar una función de costes de ajuste vinculados a la inversión. Aún así, una característica común a ambos modelos es que la depreciación del capital se determina exógenamente a una tasa constante. Además, en ellos el capital instalado se utiliza a plena capacidad.

En este artículo utilizamos los resultados de equilibrio parcial descritos más arriba, generalizando el modelo dinámico de equilibrio general con costes de ajuste de Abel y Blanchard (1983) con el fin de endogeneizar la depreciación y la utilización del capital. Para ello suponemos que existen costes asociados al mantenimiento del capital instalado, los cuales dependen de las variables endógenas tasa de depreciación y grado de utilización del capital. Como resultado, la tasa de depreciación y el grado de utilización del capital se eligen optimamente junto con la tasa de inversión. El objetivo es caracterizar un marco teórico de referencia para el análisis de dinámica comparativa en modelos de equilibrio general cuando introducimos los supuestos necesarios para la existencia de una función de inversión, una función de depreciación, y una función de subutilización del capital, bien definidas. Esto se hace en un modelo dinámico determinista absolutamente genérico, formulado en base a unas relaciones funcionales que caracterizaremos por los signos de sus primeras y segundas derivadas. En este sentido, particularizaciones del análisis que aquí desarrollamos sirven de marco teórico para la implementación empírica de modelos de crecimiento estocástico de equilibrio general como los desarrollados en Licandro y Puch (1995) y Licandro, Puch y Ruiz-Tamarit (1996).

El artículo se organiza como sigue: en el apartado 2 describimos el entorno económico especificando las preferencias, la tecnología, las funciones de costes de ajuste y de mantenimiento y las restricciones globales que se imponen a los agentes económicos. En el apartado 3 se resuelve el problema de optimización al que se enfrenta una economía centralizada, y estudiamos las reglas de decisión relativas a

las variables tasa de inversión, tasa de depreciación y tasa de utilización del capital. A continuación, en el apartado 4 se analiza el sistema dinámico hamiltoniano resultante de sustituir las funciones óptimas de control en las ecuaciones de Euler. Identificamos y caracterizamos los posibles equilibrios de estado estacionario, y estudiamos el problema de la eficiencia intertemporal. La caracterización del sistema dinámico se hace extensiva al apartado 5 con el estudio de la propiedad de estabilidad dinámica y el análisis de las trayectorias óptimas. El instrumento básico que se utiliza para caracterizar cualitativamente la versión linealizada del sistema dinámico es el diagrama de fase en combinación con la información recogida en su matriz jacobiana, la cual nos permite computar el signo de los autovalores. En este marco general se analiza también el comportamiento dinámico transicional de las principales variables del modelo. Finalmente, en el apartado 6 se ofrecen las conclusiones.

2. El Modelo

La economía está poblada por un gran número de consumidores idénticos que viven un número infinito de periodos. Sus preferencias se pueden representar mediante una función de utilidad intertemporalmente separable de forma aditiva, por lo que el bienestar del consumidor representativo viene dado por:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} U(c_t) \cdot \exp\{-\beta t\} \cdot dt$$

La función de utilidad instantánea se supone continuamente diferenciable, creciente y estrictamente cóncava en el consumo *per capita* c_t ; $U'(c_t) > 0$ y $U''(c_t) < 0$. Adicionalmente se satisfacen las condiciones $\lim_{c_t \rightarrow 0} U'(c_t) = \infty$ y $\lim_{c_t \rightarrow \infty} U'(c_t) = 0$. El parámetro β es la tasa de descuento o de preferencia temporal constante².

En nuestra economía existe un único sector productivo por lo que el *output* Y_t es un bien homogéneo que puede ser consumido o asignado a los distintos usos que contribuyen a acrecentar el stock de capital físico de la economía: inversión y mantenimiento. La tecnología se resume en la siguiente función de producción agregada:

$$(2) \quad Y_t = F(L_t, KU_t)$$

² Véase Uzawa (1968).

La producción depende de las cantidades utilizadas de los dos únicos factores de producción existentes: capital físico y trabajo. El *input* trabajo L_t , bajo el supuesto de que se trabaja a una intensidad dada y se ofrece un número fijo de horas, se corresponde con la población total N_t . Esta crece a una tasa constante y exógena n . Si partimos de un tamaño inicial de la población $N_0=1$, podemos escribir:

$$(3) \quad L_t = N_t = \exp\{nt\}$$

Por lo que respecta al capital físico utilizado suponemos que se determina como una proporción variable, $0 \leq u_t \leq 1$, del stock de capital instalado K_t . Esta variable representa la tasa de utilización del capital productivo.

$$(4) \quad KU_t = K_t \cdot u_t$$

La especificación adoptada para la función de producción implica que no existe progreso técnico exógeno. Las mismas cantidades físicas de capital y de trabajo utilizadas en periodos diferentes generan la misma cantidad de *output*³. Los supuestos que se adoptan en relación a la función de producción los podemos agrupar en tres bloques. Primero, las productividades marginales son funciones positivas, $F_1 > 0$, $F_2 > 0$, y decrecientes, $F_{11} < 0$, $F_{22} < 0$. Además, los factores productivos se suponen cooperantes, $F_{12} = F_{21} > 0$. Segundo, la función $F(\cdot)$ es una función homogénea de grado uno en sus determinantes, por lo que presenta rendimientos constantes a escala, $F(N_t, K_t \cdot u_t) = N_t \cdot F(1, k_t \cdot u_t) = N_t \cdot f(k_t \cdot u_t)$. Y tercero, se satisfacen las condiciones de Inada. Utilizando las definiciones de la producción *per capita*, y_t , y del stock de capital *per capita*, k_t , podemos reescribir la función de producción en forma intensiva⁴:

$$(5) \quad y_t = f(k_t \cdot u_t)$$

³ Las implicaciones de este supuesto en el modelo que estamos considerando son meramente formales y no afectan al fondo de la cuestión. La inclusión de progreso técnico exógeno, medido por una tasa constante, simplemente nos obligaría a reescalar las variables en términos de unidades de trabajo eficiente, y a considerar un estado estacionario en el que las variables económicas crecen a una tasa determinada por la suma de las tasas de progreso técnico y de crecimiento de la población.

⁴ Respecto a la función $f(\cdot)$ suponemos que es no negativa, dos veces diferenciable, creciente y cóncava, $f'(k_t \cdot u_t) > 0$ y $f''(k_t \cdot u_t) < 0$. Las condiciones de Inada referidas a la función de producción escrita en forma intensiva implican:

$$\lim_{k_t \cdot u_t \rightarrow 0} f'(k_t \cdot u_t) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{k_t \cdot u_t \rightarrow \infty} f'(k_t \cdot u_t) = 0$$

La producción puede asignarse al consumo, y con ello satisfacer las necesidades y el bienestar presente de las familias, o puede dedicarse a las actividades encaminadas a sostener y aumentar el stock de capital, lo cual permitirá a las empresas realizar en el futuro una producción mayor. Estas actividades son el mantenimiento y la inversión. Asociados a las mismas introducimos los dos elementos diferenciadores de este artículo respecto al modelo estándar de crecimiento óptimo. Estos elementos son los costes de mantenimiento del capital y los costes de ajuste asociados a la inversión.

En relación a los costes de ajuste mantenemos el enfoque adoptado en Abel y Blanchard (1983), con las únicas modificaciones referidas a la propia definición de las variables. En consecuencia, se supone que existen asociados a la inversión bruta unos costes de ajuste o de instalación internos, expresados en términos de unidades de producto, que son estrictamente necesarios para realizar la inversión pero que no contribuyen directamente al incremento del stock de capital. Estos costes totales de instalación los expresamos mediante la función $\Phi(I_t, K_t)$, dependiendo tanto del volumen de inversión bruta (positivamente) como del stock de capital instalado (negativamente). Suponemos que la función de costes de ajuste es homogénea de grado uno simultáneamente en todos sus determinantes, $\Phi(I_t, K_t) = \Phi(i_t, 1) \cdot K_t = \phi(i_t) \cdot K_t$. La variable i_t define la tasa de inversión bruta sobre el stock de capital. La función $\phi(i_t)$ es no negativa, dos veces diferenciable, creciente y convexa; $\phi(i_t) > 0 \forall i_t > 0$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(i_t) > 0$ y $\phi''(i_t) > 0$. Consiguientemente, el coste de ajuste *per capita* se expresa como:

$$(6) \quad \frac{\Phi(I_t, K_t)}{N_t} = \phi(i_t) \cdot k_t$$

Por otra parte, siguiendo a Ruiz-Tamarit (1995), la hipótesis *depreciation-in-use* se complementa con una tecnología de mantenimiento. Según este mecanismo, el deterioro provocado por el envejecimiento y el uso de los bienes de capital puede ser contrarrestado mediante la actividad de mantenimiento, asumiendo los costes correspondientes y evitando así la depreciación. En este escenario, el exceso de capacidad y la consiguiente subutilización del stock de capital son valorados positivamente por las empresas puesto que facilitan el mantenimiento de los bienes de capital deteriorados y permiten ahorrar en gastos asociados a dicho mantenimiento. Los costes totales de mantenimiento, $M(D_t, KU_t)$, dependen negativamente del volumen de depreciación, D_t , y positivamente de la utilización del

capital, KU_t ; $M_1 \leq 0$ y $M_2 \geq 0$. Los costes correspondientes al capital depreciado y al capital no utilizado se suponen nulos. Suponemos que la función $M(\cdot)$ es una función homogénea de grado uno en sus determinantes tomados conjuntamente, $M(D_t, KU_t) = m(\delta_t, u_t) \cdot K_t$. El término $m(\delta_t, u_t)$ representa el coste medio de mantenimiento. La tasa de depreciación variable δ_t se define como el cociente entre el volumen de depreciación total y el stock de capital. La variable u_t define la proporción del capital instalado que se utiliza en cada periodo, y expresa el efecto que el uso de los bienes de capital tiene sobre la depreciación, o alternatively sobre los costes de mantenimiento. El coste de mantenimiento del capital *per capita* se determina de la siguiente forma:

$$(7) \quad \frac{M(D_t, KU_t)}{N_t} = m(\delta_t, u_t) \cdot k_t$$

Los supuestos sobre la función de coste medio de mantenimiento del capital son:

$$(8) \quad \begin{aligned} m(\delta_t, u_t) &\geq 0, \quad \forall \bar{\delta} \leq \delta_t \leq 1 \text{ y } 0 \leq u_t \leq 1; \\ m(1, u_t) &= 0, \quad \forall 0 \leq u_t \leq 1; \\ m(\delta_t, 0) &= 0, \quad \forall \bar{\delta} \leq \delta_t \leq 1; \\ m_1 &< 0, \quad m_2 > 0; \\ m_{11} &> 0, \quad m_{22} > 0, \quad m_{12} < 0, \quad m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0. \end{aligned}$$

El coste medio es siempre no negativo, decreciente con la tasa de depreciación y creciente con la tasa de utilización del capital. La función de coste medio se supone estrictamente convexa. El valor $\bar{\delta}$ representa la tasa de depreciación mínima, correspondiente a la depreciación provocada por el estricto deterioro físico del capital. Esta tasa coincide con la observada sólo cuando la actividad de mantenimiento se ejerce a su nivel máximo.

En cuanto a las restricciones, en primer lugar tenemos la ecuación de acumulación de capital $\dot{K}_t = I_t - \delta_t \cdot K_t$. Las variaciones experimentadas por el stock de capital son el resultado de las diferentes decisiones que las empresas toman sobre la inversión bruta I_t , y la tasa de depreciación, δ_t . Si escribimos en términos *per capita* tenemos:

$$(9) \quad \dot{k}_t = (i_t - \delta_t - n) \cdot k_t$$

Por otra parte, la restricción global de recursos en este modelo es $F(N_t, K_t \cdot u_t) - \Phi(I_t, K_t) - M(D_t, K_t \cdot u_t) = C_t + \dot{K}_t + \delta_t \cdot K_t$. La producción neta de costes de ajuste y de mantenimiento puede asignarse libremente al consumo o a la inversión bruta. Teniendo en cuenta la restricción (9) junto con las expresiones (5), (6) y (7) nos queda:

$$(10) \quad c_t = f(k_t \cdot u_t) - [i_t + \phi(i_t) + m(\delta_t, u_t)] \cdot k_t$$

Es decir, el consumo *per capita* no puede ser mayor que la correspondiente producción después de descontar todos los recursos asignados a las actividades relacionadas con el acrecentamiento del stock de capital físico de la economía.

3. El Problema de Optimización de una Economía Centralizada

De acuerdo con los planteamientos del apartado anterior, nuestra economía está compuesta por familias y empresas competitivas que siguen un comportamiento optimizador. En ausencia de externalidades e información asimétrica, la solución del planificador central coincide con el equilibrio competitivo. Por ello, sin pérdida de generalidad, analizamos el caso de una economía gobernada por un planificador que decide la tasa de inversión, la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital. El estado de la economía viene representado por el capital *per capita*. El problema de control óptimo consiste en maximizar la siguiente expresión:

$$(11) \quad \int_0^{\infty} U(c_t) \cdot \exp\{-(\beta-n)t\} \cdot dt$$

sujeto a las restricciones de las ecuaciones (9) y (10), dado un k_0 . La expresión (11) es un indicador del bienestar de la comunidad cuando esta está constituida por individuos con idénticas preferencias que extraen la misma satisfacción de un cierto volumen de consumo. En ella se ha sustituido el supuesto de la ecuación (3) respecto al crecimiento de la población. Para que el problema esté bien definido, el valor del integrando debe estar acotado. Esto se garantiza, dada la caracterización de la función de utilidad adoptada previamente, si suponemos $\beta > n$, la tasa de descuento intertemporal mayor que la tasa de crecimiento de la población⁵.

⁵ Dada la naturaleza exponencial del factor de descuento en la ecuación (11), se podría incluso aceptar el supuesto de que el integrando $U(c_t)$ crece a una tasa exponencial constante, siempre y cuando ésta sea inferior a $\beta - n$.

Volviendo al problema de maximización, de acuerdo con los postulados generales de la teoría del control óptimo podemos escribir la siguiente función hamiltoniana en términos de valor corriente:

$$(12) \quad H(i_t, \delta_t, u_t, k_t, \mu_t) = U(f(k_t \cdot u_t) - [i_t + \phi(i_t) + m(\delta_t, u_t)] \cdot k_t) + \mu \cdot [(i_t - \delta_t - n) \cdot k_t]$$

El principio del máximo de Pontryagin⁶ establece las condiciones necesarias para la existencia de una solución interior. Supongamos que la función hamiltoniana es estrictamente cóncava en las variables de control, lo cual nos asegura la continuidad de las funciones solución⁷. Bajo este supuesto, las condiciones necesarias son al mismo tiempo suficientes. Con el objetivo de facilitar la interpretación de las condiciones de optimalidad hemos realizado las sustituciones siguientes⁸: $\lambda = \mu/U'(c)$ y $U'(c) \equiv \eta$. Además tenemos que $-U''(c) \cdot c/U'(c) = 1/\sigma(c)$, donde $\sigma(c)$ es la elasticidad de sustitución intertemporal, y que $(\dot{\eta}/\eta) = (-1/\sigma(c)) \cdot (\dot{c}/c)$.

$$(13) \quad \lambda = 1 + \phi'(i)$$

$$(14) \quad \lambda = -m_1(\delta, u)$$

$$(15) \quad f'(k \cdot u) = m_2(\delta, u)$$

$$(16) \quad \dot{\lambda} = i + \phi(i) + m(\delta, u) - f'(k \cdot u) \cdot u + \lambda \cdot [\beta + \delta - i - (\dot{\eta}/\eta)]$$

$$(9) \quad \dot{k} = (i - \delta - n) \cdot k$$

dado un k_0 y la condición de transversalidad correspondiente:

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu \cdot k \cdot \exp\{-(\beta - n)t\} = 0$$

Diferenciando las condiciones (13), (14) y (15), y resolviendo para di , $d\delta$ y du , podemos determinar el signo de los efectos parciales de cada uno de los determinantes de las funciones óptimas de control, $i = i(k, \lambda)$, $\delta = \delta(k, \lambda)$ y $u = u(k, \lambda)$. Estas funciones son las que, bajo los supuestos del teorema de la función implícita, resuelven simultáneamente las anteriores condiciones de primer orden.

⁶ Véase Seierstad y Sydsaeter (1987).

⁷ Para ello, es condición suficiente que la matriz hessiana construida con las derivadas segundas con respecto a las variables de control sea definida negativa.

⁸ En las expresiones que siguen hemos suprimido el subíndice temporal de las variables correspondiente al periodo t .

$$(18) \quad \begin{bmatrix} di \\ d\delta \\ du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\phi''} \\ \frac{-m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|} & \frac{f'' \cdot k - m_{22}}{|A|} \\ \frac{m_{11} \cdot f'' \cdot u}{|A|} & \frac{m_{21}}{|A|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dk \\ d\lambda \end{bmatrix}$$

donde $|A| = m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21} - m_{11} \cdot f'' \cdot k > 0$. De las expresiones anteriores y los supuestos adoptados a lo largo del artículo se deducen los siguientes resultados:

$$\frac{\partial i_t}{\partial k_t} = 0, \quad \frac{\partial i_t}{\partial \lambda_t} > 0, \quad \frac{\partial \delta_t}{\partial k_t} < 0, \quad \frac{\partial \delta_t}{\partial \lambda_t} < 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial k_t} < 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial \lambda_t} < 0.$$

Antes de seguir con el análisis del estado estacionario, es interesante conocer cómo los anteriores efectos sobre las variables de control pueden trasladarse tanto al consumo *per capita* como a la producción *per capita*. Para ello acudimos a las ecuaciones (10) y (5) y sustituimos las funciones óptimas de control de manera que ambas variables queden expresadas en términos de la variable de estado k y del precio λ .

$$(19) \quad c(k, \lambda) = f(k \cdot u(k, \lambda)) - [i(k, \lambda) + \phi(i(k, \lambda)) + m(\delta(k, \lambda), u(k, \lambda))] \cdot k$$

$$(20) \quad y(k, \lambda) = f(k \cdot u(k, \lambda))$$

Los correspondientes efectos parciales vienen dados por las siguientes expresiones generales:

$$(21) \quad \frac{\partial c_t}{\partial k_t} = \lambda \cdot [\beta + \delta - i - (\dot{\eta}/\eta) - (\dot{\lambda}/\lambda) - \frac{k \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|}] \geq 0$$

$$(22) \quad \frac{\partial c_t}{\partial \lambda_t} = -k \cdot \left\{ \frac{1 + \phi'}{\phi''} + m_1 \cdot \frac{f'' \cdot k - m_{22}}{|A|} \right\} < 0$$

$$(23) \quad \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = f' \cdot u \cdot \left[1 - \frac{-k \cdot m_{11} \cdot f''}{|A|} \right] > 0$$

$$(24) \quad \frac{\partial y_t}{\partial \lambda_t} = f' \cdot k \cdot \frac{m_{21}}{|A|} < 0$$

De todos los signos analizados, el único sobre el que no es posible concluir cuando trabajamos bajo el supuesto de que $m_{12} < 0$ es el que recoge el efecto parcial de las variaciones del capital *per capita* sobre el consumo *per capita*. Esto es debido a que el producto derivado de una mayor utilización del *input* capital puede verse negativamente desbordado por los mayores requerimientos de recursos necesarios para la instalación del propio capital y su mantenimiento.

4. El Estado Estacionario

Consideremos el sistema dinámico de tipo hamiltoniano modificado de las ecuaciones (9) y (16). En ellas sustituimos las funciones óptimas de control del apartado anterior. El sistema dinámico resultante lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$(25) \quad \dot{k} = (i(k, \lambda) - \delta(k, \lambda) - n) \cdot k = \Pi(k, \lambda, n)$$

$$(26) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda} = & i(k, \lambda) + \phi(i(k, \lambda)) + m(\delta(k, \lambda), u(k, \lambda)) - f'(k \cdot u(k, \lambda)) \cdot u(k, \lambda) \\ & + \lambda \cdot [\beta + \delta(k, \lambda) - i(k, \lambda) - (\dot{\eta}/\eta)] = \Gamma(k, \lambda, \beta) \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales describen el comportamiento dinámico de la variable de estado k y de la variable de coestado λ .

En el equilibrio de estado estacionario se satisface la restricción $\dot{k} = \dot{\lambda} = \dot{\eta} = 0$. En nuestro modelo con crecimiento de la población constante y sin progreso técnico exógeno, las variables k , y , c definidas en términos *per capita* permanecen constantes, mientras que las variables en niveles K , Y , C crecen a una tasa constante n . Sustituyendo, obtenemos los valores de equilibrio $k^*(\beta, n)$ y $\lambda^*(\beta, n)$ que resuelven el sistema de ecuaciones estáticas: $\Pi(k^*, \lambda^*, n) = 0$ y $\Gamma(k^*, \lambda^*, \beta) = 0$.

Estos valores, junto con la ecuación (19), nos dan una expresión para el consumo *per capita* en el estado estacionario. En ella hemos dejado que aparezcan de manera explícita los valores de equilibrio de las variables de control.

$$(27) \quad c^* = f(k^* \cdot u^*) - [i^* + \phi(i^*) + m(\delta^*, u^*)] \cdot k^*$$

Además, la ecuación (25) evaluada en el estado estacionario nos ofrece la siguiente relación entre los valores de equilibrio de la tasa de inversión y la tasa de depreciación:

$$(28) \quad i^* = n + \delta^*$$

De ella se deduce que no es posible obtener el valor de equilibrio de la tasa de inversión sin el conocimiento previo o simultáneo del de la tasa de depreciación, el cual se determina conjuntamente con el valor de estado estacionario de la tasa de utilización del capital. Así pues, a diferencia de lo que ocurre en otros modelos más simples donde la depreciación se determina exógenamente a una tasa constante $\bar{\delta}$, y donde el capital se utiliza a plena capacidad, en el nuestro resulta imprescindible resolver conjunta y simultáneamente todas las ecuaciones del modelo para conocer los valores de estado estacionario tanto de las variables de estado como de las de control. Esta propiedad del modelo se ilustra en el gráfico que presentamos a continuación.

(Gráfico 1)

Por otra parte, de la ecuación (26) se deduce que en el estado estacionario, después de realizar las correspondientes sustituciones, se cumple la siguiente relación:

$$(29) \quad f'(k^* \cdot u^*) = \frac{1}{u^*} \cdot [\delta^* + \beta + \phi(\delta^* + n) + m(\delta^*, u^*) + (\beta - n) \cdot \phi'(\delta^* + n)]$$

Esta expresión nos da el valor de estado estacionario del capital *per capita*. En realidad, constituye una versión modificada de las conocidas *modified golden rules*, que en adelante denominaremos "*delta modified golden rule*" para diferenciarla de las demás⁹. Las principales diferencias con respecto a las versiones precedentes

⁹ La primera formulación de la *modified golden rule* que consideraremos es la correspondiente al modelo Ramsey-Cass-Koopmans, recogida más abajo en la ecuación

son la presencia de la tasa de utilización del capital, la figura de los costes de mantenimiento y, en especial, la tasa de depreciación endógena. Además, observamos que sólo con la determinación simultánea de todas las variables de control, y entre ellas la tasa de inversión, resulta factible identificar el valor estacionario del capital *per capita*. Una importante conclusión es que ante pequeñas variaciones en los parámetros que configuran las 'tecnologías' tanto de ajuste como de mantenimiento, surgirán distintos equilibrios de estado estacionario sin necesidad de apelar a diferenciaciones drásticas en términos de preferencias, patrones de crecimiento poblacional o incluso pautas de progreso tecnológico.

También podemos calcular la correspondiente *golden rule* en este modelo con depreciación endógena y costes de mantenimiento, a partir de la ecuación (27) diferenciando con respecto a k^* . El resultado es una "*delta golden rule*" que podemos escribir de la siguiente manera¹⁰:

$$(30) \quad f'(k_{DGR}^* \cdot u^*) = \frac{1}{u^*} \cdot [\delta^* + n + \phi(\delta^* + n) + m(\delta^*, u^*)]$$

(32). La segunda es la del modelo Abel-Blanchard, que modifica de la anterior y que por comodidad denominaremos "*special modified golden rule*". Esta se recoge en la ecuación (33).

¹⁰ La *golden rule* correspondiente al modelo de crecimiento óptimo à la Ramsey-Cass-Koopmans, equivalente a la de Solow-Swan con tasa de ahorro exógena y constante, se puede escribir como sigue:

$$(30') \quad f'(k_{GR}^*) = \bar{\delta} + n$$

En el modelo de Abel-Blanchard con costes de ajuste asociados a la inversión bruta se deriva una *golden rule* particular que denominamos "*special golden rule*", y que tras adaptar a nuestra nomenclatura podemos escribir como sigue:

$$(30'') \quad f'(k_{SGR}^*) = \bar{\delta} + n + \phi(\bar{\delta} + n).$$

Resulta inmediato comprobar que no existe una diferencia fundamental entre las dos ecuaciones anteriores. De hecho, ambas coinciden si se reescala la función de costes de ajuste para que éstos sean cero cuando la tasa de inversión bruta toma un cierto valor predeterminado constante, como por ejemplo el correspondiente a la suma de las tasas constantes de crecimiento de la población y de depreciación exógena. Este es exactamente el valor que adoptará dicha variable en el equilibrio de estado estacionario correspondiente a los dos modelos aludidos.

Sin embargo, no se puede afirmar lo mismo al comparar con nuestra ecuación (30). En ésta no es posible reescalar las funciones de coste de ajuste y de mantenimiento para unos valores predeterminados de la tasa de inversión, la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital. Estas variables, incluso en el equilibrio de estado estacionario, se determinan endógenamente pudiendo adoptar una amplia gama de valores.

A partir de los resultados de las ecuaciones (29) y (30), dada la caracterización de las funciones de costes de ajuste y de mantenimiento, y dado que $\beta > n$ y $\delta^* + n > 0$, podemos concluir que $f'(k^* \cdot u^*) > f'(k_{DGR}^* \cdot u^*)$. Así pues, dada también la caracterización de la función de producción, el comportamiento optimizador del planificador central en nuestro modelo lleva al resultado siguiente:

$$(31) \quad k^* < k_{DGR}^*$$

Este resultado nos permite identificar la situación de estado estacionario como una situación dinámicamente eficiente. La economía no ahorra lo suficiente como para alcanzar el stock de capital correspondiente a la *delta golden rule*, pero ello no constituye ningún problema desde el punto de vista del bienestar puesto que dicho valor se obtiene como solución centralizada al problema de maximización de la utilidad, ofreciendo un resultado Pareto óptimo.

Este resultado es relativamente estándar en la literatura sobre crecimiento óptimo. Sin embargo, otros resultados no tan evidentes parecen desprenderse de lo anterior si comparamos con los modelos de Ramsey-Cass-Koopmans y de Abel-Blanchard. En estos modelos, los resultados correspondientes a la solución centralizada los podemos escribir, respectivamente, como sigue¹¹:

$$(32) \quad f'(k_{RCK}^*) = \bar{\delta} + \beta$$

$$(33) \quad f'(k_{AB}^*) = \bar{\delta} + \beta + \phi(\bar{\delta} + n) + (\beta - n) \cdot \phi'(\bar{\delta} + n)$$

Al comparar k_{RCK}^* y k_{AB}^* con el k_{DGR}^* correspondiente a la *delta golden rule*¹², nos encontramos con que aún cuando $\beta > n$, el hecho de que $\delta^* > \bar{\delta}$, $\phi(\delta^* + n) > 0$ y $m(\delta^*, u^*) > 0$, puede llevarnos a un resultado como el siguiente:

¹¹ Las ecuaciones (32) y (33) sólo son formalmente diferentes en apariencia, puesto que bajo la correspondiente, y legítima, normalización de la función de costes de ajuste nos estarían ofreciendo exactamente el mismo resultado. Este resultado contrasta con el ofrecido por la ecuación (29), poniendo de relieve la particular naturaleza del equilibrio de estado estacionario que se genera en nuestro modelo.

¹² Para facilitar la comparación nos abstraemos de la infrutilización del capital y consideramos el valor k_{DGR}^* obtenido de la ecuación (30) bajo el supuesto $u^* = 1$. Es decir, el valor que satisface la ecuación:

$$f'(k_{DGR}^*) = \delta^* + n + \phi(\delta^* + n) + m(\delta^*, 1)$$

En cualquier caso, esta simplificación no resulta determinante en relación a los resultados que se comentan en el texto principal.

$$(34) \quad k^* < k_{DGR}^* < k_{AB}^* \leq k_{RCK}^*$$

Este resultado es tanto más probable cuanto más pequeña sea la diferencia entre β y n . Con él se pone de relieve que una subóptima política de depreciación del capital productivo, basada en la adjudicación de costes nulos al mantenimiento del capital deteriorado, puede tener consecuencias graves para la economía. Esta puede verse arrojada, aunque no necesariamente, a situaciones dominadas por un exceso de capital instalado¹³. En el marco de una economía cerrada como la que estamos considerando, esto sólo se puede dar sobre una trayectoria caracterizada por el exceso de ahorro y el bajo consumo. Por consiguiente, a lo largo de trayectorias dinámicamente ineficientes.

5. Análisis Dinámico de las Trayectorias Óptimas

Consideremos ahora el sistema dinámico de las ecuaciones (25) y (26) que describe el comportamiento global de nuestro sistema económico. Para cada una de esas funciones podemos calcular las correspondientes derivadas parciales respecto al par (k, λ) , obteniendo los siguientes resultados¹⁴:

$$(35) \quad \frac{\partial \pi(k, \lambda)}{\partial k} = (i - \delta - n) + \frac{k \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|}$$

$$(36) \quad \frac{\partial \pi(k, \lambda)}{\partial \lambda} = k \cdot \left[\frac{1}{\phi''} - \frac{f'' \cdot k - m_{22}}{|A|} \right]$$

$$(37) \quad \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k} = -f'' \cdot u^2 \cdot \left[1 + k \cdot \frac{m_{11} \cdot f''}{|A|} \right] - \lambda \cdot \frac{\partial(\dot{\eta}/\eta)}{\partial k}$$

¹³ Si no se contabilizan los costes de mantenimiento, entonces puede parecer óptimo realizar un mantenimiento máximo del capital deteriorado, dejando la depreciación en un nivel mínimo asociado a la tasa $\bar{\delta}$, correspondiente al inevitable deterioro físico.

¹⁴ Las expresiones (35)-(38) representan, una vez evaluadas en el correspondiente estado estacionario, los elementos de la matriz jacobiana resultante de la linealización del sistema dinámico.

$$(38) \quad \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda} = -f'' \cdot u \cdot k \cdot \frac{m_{21}}{|A|} + [\delta - i + \beta - (\dot{\eta}/\eta) - \lambda \cdot \frac{\partial(\dot{\eta}/\eta)}{\partial \lambda}]$$

A partir de estos resultados podemos tratar de caracterizar las correspondientes líneas de fase en el espacio (k, λ) . En primer lugar tenemos todos aquellos puntos en los cuales se cumple $\dot{k} = 0$. Los coeficientes recogidos en las ecuaciones (35) y (36) permiten calcular la pendiente de la línea de fase y determinan la dinámica de la variable k fuera de los puntos estacionarios. Los signos de estos coeficientes son invariantes y sus valores son los siguientes:

$$(35') \quad \left. \frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = \frac{k \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{|A|} > 0$$

$$(36') \quad \left. \frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\dot{k}=0} = k \cdot \left[\frac{1}{\phi''} - \frac{f'' \cdot k - m_{22}}{|A|} \right] > 0$$

La pendiente de esta línea de fase es negativa en todo su trazado dado que:

$$(39) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = - \frac{\frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial k}}{\frac{\partial \Pi(k, \lambda)}{\partial \lambda}} = \frac{\phi'' \cdot m_{12} \cdot f'' \cdot u}{\phi'' \cdot f'' \cdot k - \phi'' \cdot m_{22} - m_{11} \cdot m_{22} + m_{12} \cdot m_{21} + m_{11} \cdot f'' \cdot k} < 0$$

Además, dada la anterior expresión, se demuestra fácilmente que la línea de fase es estrictamente convexa, $\partial^2 \lambda / \partial k^2 > 0$. Por otra parte, dados los signos recogidos en las ecuaciones (35') y (36'), sabemos que por encima y a la derecha de la línea de fase se observa $\dot{k} > 0$, mientras que por debajo y a la izquierda de la misma tenemos que $\dot{k} < 0$.

En segundo lugar, para todos aquellos puntos del espacio (k, λ) donde se cumple la condición de estacionariedad $\dot{\lambda} = \dot{\eta} = 0$, los coeficientes expresados en las ecuaciones (37) y (38) permiten calcular la pendiente de la línea de fase y determinar la dinámica de la variable λ fuera de los puntos estacionarios.

$$(37') \quad \left. \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0} = -f'' \cdot u^2 \cdot \left[1 - \frac{-k \cdot m_{11} \cdot f''}{-k \cdot m_{11} \cdot f'' + (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21})} \right] > 0$$

$$(38') \quad \left. \frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\dot{\lambda}=0} = \left(\frac{-f'' \cdot u \cdot k \cdot m_{21}}{|A|} \right) + (\beta + \delta - i) < 0$$

El signo del segundo coeficiente no es invariante a lo largo de todo el espacio (k, λ) . Por tanto, la pendiente de la línea de fase tampoco está definida independientemente del área donde nos encontremos. En concreto, podemos especificar el valor de esta pendiente de la siguiente manera:

$$(40) \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0} = - \frac{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial k}}{\frac{\partial \Gamma(k, \lambda)}{\partial \lambda}} = \frac{(m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}) \cdot f'' \cdot u^2}{(\beta + \delta - i) \cdot |A| - f'' \cdot u \cdot m_{21} \cdot k} > 0$$

Así, por ejemplo, la ecuación (38') nos dará un valor inequívocamente positivo sólo para valores pequeños de λ , mientras que para valores elevados dicho coeficiente será negativo. Por ello, la pendiente de la línea de fase será negativa para valores pequeños de λ y positiva para valores elevados de la misma. De acuerdo con las condiciones de primer orden, los valores elevados de λ se asocian con valores pequeños de la tasa de depreciación δ y con valores elevados de la tasa de inversión bruta i . En consecuencia, el término $(\beta + \delta - i)$ presenta un signo variable que depende del valor de λ correspondiente a las coordenadas del punto donde localicemos el análisis.

Dada la anterior segmentación por tramos de la pendiente de la línea de fase correspondiente a los puntos donde $\dot{\lambda} = 0$, la dinámica de la variable λ fuera de sus puntos estacionarios será la siguiente: En el tramo con pendiente negativa observaremos que $\dot{\lambda} < 0$ por debajo y a la izquierda de la línea de fase, mientras que por arriba y a la derecha se observará $\dot{\lambda} > 0$. En el tramo con pendiente positiva, en cambio, tenemos que $\dot{\lambda} > 0$ en todos los puntos situados por debajo y a la derecha de la línea de fase, y $\dot{\lambda} < 0$ en aquellos situados por encima y a la izquierda.

Al centrar nuestro estudio en las situaciones de estado estacionario, donde se satisface la condición $\dot{k} = \dot{\lambda} = 0$, y tratar de concretar la pendiente de las líneas de fase en el entorno del punto de equilibrio, seguimos encontrándonos con la indeterminación anterior. En particular, el signo del coeficiente de la ecuación (40) es ambiguo, aunque se simplifica.

$$(40') \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0, \dot{k}=0} = \frac{(m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}) \cdot f'' \cdot u^{*2}}{(\beta - n) \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21} - m_{11} \cdot f'' \cdot k^*) - f'' \cdot u^* \cdot m_{21} \cdot k^*} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

Toda la información precedente relativa al sistema dinámico se puede resumir gráficamente en el diagrama de fase. No obstante, dada la falta de definición de los signos de las ecuaciones (40) y (40'), cuya ambigüedad se traslada a la indeterminación del número de equilibrios existentes y a su caracterización dinámica, presentaremos a continuación tres gráficos con las posibles situaciones definidas por la presencia de un único equilibrio de estado estacionario y, alternativamente, la existencia de múltiples estados estacionarios aislados.

(Gráficos 2, 3 y 4)

Una manera de obtener explícitamente una caracterización completa del sistema dinámico no lineal de las ecuaciones (25) y (26) sería por medio de la aproximación lineal en torno al estado estacionario. No obstante, dados los resultados cuantitativos y cualitativos que hemos ido presentando a lo largo de este apartado, disponemos de información suficiente para identificar el equilibrio único que hemos supuesto en el gráfico 2 como un equilibrio de punto de silla¹⁵. El sistema presenta,

¹⁵ A efectos de caracterizar localmente el sistema dinámico linealizado en el entorno de un estado estacionario, podemos dirigir nuestra atención hacia los autovalores de la ecuación característica. En primer lugar, la naturaleza hamiltoniana del sistema originado en un problema estándar de optimización dinámica, establece que los autovalores se agrupan por parejas, cuando son reales, o por cuádruplas cuando son complejos [Kurz (1968)]. En segundo lugar, la dimensión ($2n$, siendo en nuestro caso $n=1$, el número de variables de estado) y el descuento ($\rho = \beta - n > 0$) establecen una serie de limitaciones respecto a las posibles configuraciones dinámicas. En tercer lugar, la estricta concavidad de la función hamiltoniana con respecto a la variable de estado y la estricta convexidad con respecto a la variable de coestado, determinan el signo de los coeficientes de la matriz jacobiana que se encuentran fuera de la diagonal principal. Además, los coeficientes de la diagonal principal aparecen relacionados entre sí en términos de oposición y transposición, modificada ésta sólo por la presencia del factor de descuento en uno de ellos. Recordemos que los coeficientes de la matriz jacobiana vienen dados en el texto principal por las expresiones (35)-(38) evaluadas en el correspondiente estado estacionario. Dado lo anterior, podemos concluir que, para todo estado estacionario estructuralmente

en este caso, inestabilidad del tipo senda de silla¹⁶, convergiendo hacia el equilibrio a lo largo de las dos únicas trayectorias posibles: una desde el noroeste con un aumento continuado de k acompañado de la disminución de λ , y otra desde el sureste con variaciones de k y λ en sentido opuesto al anterior. Entre las infinitas trayectorias que satisfacen las ecuaciones (25) y (26), las únicas que cumplen la condición de transversalidad de la ecuación (17) junto con la condición inicial relativa a la variable k , son las trayectorias óptimas. En el caso de un equilibrio de punto de silla, las ramas estables del mismo satisfacen las anteriores condiciones de optimalidad. Aquí, la expresión (40') tiene signo positivo y, en su entorno, el coeficiente de la ecuación (38') es negativo.

En el caso más complejo de equilibrios múltiples como el representado en el gráfico 3, nos encontramos con que uno de los estados estacionarios tiene la propiedad de punto de silla mientras que el otro es localmente inestable¹⁷. Dada la expresión (40'), si en uno de los equilibrios dicha expresión es positiva, en el otro estado estacionario necesariamente será negativa, aunque de menor valor absoluto que el término de la expresión (39). Este segundo estado estacionario se corresponde con un valor de λ menor y un mayor valor de k . La inestabilidad que lo caracteriza la podemos deducir del hecho que, en su entorno, la expresión (38') tiene signo positivo. Ninguna de las trayectorias que pasan cerca de este segundo estado estacionario, exceptuando la que se sitúa sobre el propio punto de equilibrio, satisface la condición de transversalidad, por lo que los valores de las variables no están acotados.

estable ($\gamma_i \neq 0 \forall i = \{1, 2\}$), la dinámica en torno al mismo sólo puede responder a uno de los dos patrones siguientes: dualidad estabilidad/inestabilidad local del tipo senda de silla, y completa inestabilidad local.

¹⁶ Generalmente, cuando se analiza un sistema dinámico compuesto por dos ecuaciones diferenciales, las funciones determinante, traza y discriminante de la matriz jacobiana permiten identificar el tipo de estabilidad dinámica que presenta el sistema en torno al estado estacionario. En algunos casos particulares el signo del determinante resulta suficiente.

En nuestro sistema dinámico este determinante se define de la siguiente manera: $\text{Det}[J] = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = (35') \cdot (38') - (37') \cdot (36')$. En consecuencia, para la situación representada en el gráfico 2 tenemos $\text{Det}[J] = (+) \cdot (-) - (+) \cdot (+) < 0$. Por lo que los autovalores reales γ_1 y γ_2 son uno positivo y el otro negativo.

¹⁷ En la situación representada en el gráfico 3 tenemos dos estados estacionarios con propiedades de estabilidad dinámica que sólo pueden corresponder a la senda de silla o a la inestabilidad local. En consecuencia, el determinante de la matriz jacobiana puede tener tanto signo negativo como positivo, $\text{Det}[J] = (+) \cdot (+) - (+) \cdot (+) = ?$. De ello se deduce que los autovalores γ_1 y γ_2 son uno positivo y el otro negativo en uno de los estados estacionarios, mientras que son los dos positivos en el otro estado estacionario.

La tercera posibilidad es la recogida en el gráfico 4, de nuevo con un único equilibrio de estado estacionario. En este caso la expresión de la ecuación (40') tiene signo negativo y el coeficiente de la ecuación (38') es positivo. A diferencia de lo que ocurría en el caso del gráfico 3, ahora el valor positivo de la expresión (38') no es indicativo de inestabilidad absoluta sino que contribuye a asegurar la propiedad de punto de silla¹⁸. La razón es que, en el equilibrio, el valor negativo de la expresión (40') representa un mayor valor absoluto que el valor negativo de la expresión (39). El punto de silla que aquí se obtiene se caracteriza también porque las sendas convergentes se orientan en dirección noroeste-sureste.

En los tres casos analizados, los equilibrios de estado estacionario relevantes presentan la propiedad del punto de silla con sólo dos trayectorias óptimas que convergen hacia el equilibrio. Ambas satisfacen la condición de transversalidad para unas condiciones iniciales cualesquiera. En los tres casos la convergencia se establece en dirección noroeste-sureste, pero la posición y la pendiente de las trayectorias convergentes en el diagrama de fase dependen de la forma particular que adopten las distintas funciones del problema. En general, si el valor inicial de k es menor que el de equilibrio, lo cual asegura la eficiencia dinámica, a lo largo de la senda de convergencia dicho valor aumentará mientras que el valor de λ , inicialmente superior al de equilibrio, disminuirá.

Las implicaciones dinámicas transicionales que de estos movimientos se derivan para la tasa de inversión, la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital, las podemos deducir de nuestros cálculos previos en la matriz de (18). En concreto, a medida que k aumenta encontramos que i disminuye debido al descenso que experimenta la variable λ , mientras que δ y u presentan un comportamiento ambiguo. Ante la disminución de λ la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital tienden a aumentar; sin embargo, los aumentos de k provocan disminuciones en estas variables de tal modo que el efecto neto es incierto. Este efecto neto depende, en cada caso, de la importancia relativa de las variaciones de k y λ , las cuales dependen de la forma que adopte la trayectoria convergente en esta zona del diagrama de fase. Las otras dos variables relevantes en nuestro modelo son la producción *per capita* y el consumo *per capita*. La primera se determina de acuerdo con la función $y=f(k \cdot u)$ por lo que, a lo largo de la senda de convergencia, el

¹⁸ En la situación representada en el gráfico 4 obtenemos que el determinante de la matriz jacobiana es negativo, $\text{Det}[J] = (+) \cdot (+) \cdot (-) \cdot (+) < 0$. De ello se deduce que los autovalores reales γ_1 y γ_2 son uno positivo y el otro negativo.

incremento de k provoca un efecto directo positivo sobre la producción, tan sólo parcialmente compensado por el efecto indirecto negativo asociado a la reducción que experimenta la tasa de utilización u . Ello es debido a que, de acuerdo con la ecuación (23), $\partial y / \partial k > 0$. Además, la disminución de λ a lo largo de dicha senda óptima tiene por efecto incrementar la tasa de utilización y , con ella, la producción. Esto se debe a que, de acuerdo con la ecuación (24), $\partial y / \partial \lambda < 0$. Estos dos resultados conjuntamente nos permiten anticipar un movimiento ascendente de la producción *per capita* a lo largo de la rama descendente de la trayectoria que converge al equilibrio. Por lo que respecta al consumo *per capita*, dada la ecuación (19) y los resultados de las ecuaciones (21) y (22), no es posible anticipar de una manera inequívoca y concluyente qué tipo de evolución experimentará dicha variable. Sin embargo, dada la combinación de un efecto positivo asociado a la disminución de λ con el efecto ambiguo que aparece asociado al incremento de k , es lógico esperar que, a lo largo de la senda convergente, el consumo *per capita* aumente.

En el contexto de la discusión precedente, ilustrada con los correspondientes diagramas de fase, podemos localizar el origen de la indeterminación que afecta a algunos de los resultados obtenidos¹⁹ en el signo de uno de los términos que aparece en las expresiones (39) y (40). Nos referimos al término m_{12} , o su equivalente m_{21} , que a lo largo de todo el artículo, empezando por la ecuación (8), hemos supuesto negativo. Este es uno de los elementos que expresan los supuestos adoptados en relación a la función de costes de mantenimiento del capital, y cuya modificación podría cambiar significativamente la caracterización de nuestro sistema dinámico. Este es, además, uno de los supuestos que cuenta con menor soporte empírico, hasta el momento. Así pues, en lo que queda analizaremos las propiedades de nuestro sistema dinámico bajo los supuestos alternativos $m_{12} = m_{21} = 0$ y $m_{12} = m_{21} > 0$. Para cada uno de ellos estudiamos la configuración del equilibrio estacionario así como su caracterización dinámica, tratando de anticipar la evolución de las variables relevantes a lo largo de las trayectorias óptimas.

En el caso en que la segunda derivada cruzada de la función $m(\delta, u)$ es cero, $m_{12} = m_{21} = 0$, el coeficiente correspondiente a la ecuación (35') se anula mientras que el de la ecuación (36') se mantiene definido positivo. Consiguientemente, la línea de fase correspondiente a $\dot{k} = 0$ tiene pendiente nula y se representa por una línea

¹⁹ Nos referimos a aquellos resultados concernientes a las pendientes de las líneas de fase, al número de estados estacionarios y sus propiedades de estabilidad dinámica, así como los que afectan al tipo de comportamiento dinámico transicional de las variables de control.

horizontal. Además, en el area situada por encima de la línea de fase $\dot{k} > 0$, mientras que en el area inferior $\dot{k} < 0$. Por otra parte, el coeficiente de la ecuación (37') mantiene su valor positivo, mientras que el coeficiente de la ecuación (38') aparece indeterminado, dependiendo de las coordenadas del punto donde nos situemos dentro del diagrama de fase. La indeterminación del signo de $(\beta + \delta - i)$ tiene implicaciones sobre la pendiente de la línea de fase $\dot{\lambda} = 0$, la cual se nos representa también indeterminada. Sin embargo, si evaluamos esta pendiente en los puntos de equilibrio estacionario donde $\beta + \delta - i^* = \beta - n > 0$, entonces comprobamos que tiene signo invariante negativo.

$$(40'') \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\dot{\lambda}=0, \dot{k}=0} = \frac{m_{11} \cdot m_{22} \cdot f'' \cdot u^{*2}}{(\beta - n) \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{11} \cdot f'' \cdot k^*)} < 0$$

El conjunto de estos resultados los hemos representado en el gráfico 5. El equilibrio único que se obtiene en este caso tiene las propiedades dinámicas del punto de silla²⁰. Las trayectorias convergentes son semejantes, cualitativamente, a las consideradas en los casos anteriores. Si el valor inicial de k se encuentra por debajo del de equilibrio, a lo largo de la senda de convergencia dicho valor aumentará mientras que el valor de λ , situado inicialmente por arriba del de equilibrio, disminuirá.

(Gráfico 5)

La dinámica transicional de las variables de control asociada a este supuesto alternativo sobre la función de coste medio de mantenimiento, aparece ahora más nítidamente definida que en el caso anterior, puesto que nos encontramos con los siguientes resultados simplificadores: $\partial \delta / \partial k = 0$, $\partial u / \partial \lambda = 0$, $\partial y / \partial \lambda = 0$. A medida que k aumenta y λ disminuye, la tasa de inversión i disminuye, la tasa de depreciación δ aumenta, la tasa de utilización u disminuye, y tanto la producción *per capita* como el consumo *per capita* aumentan.

Finalmente, vamos a considerar el caso en que $m_{12} = m_{21} > 0$. En este caso el coeficiente de la ecuación (35') resulta ser negativo y, junto con el valor

²⁰ En la situación representada en el gráfico 5 obtenemos que el determinante de la matriz jacobiana es negativo, $\text{Det}[J] = (0) \cdot (+) - (+) \cdot (+) < 0$, y los autovalores reales γ_1 y γ_2 son uno positivo y el otro negativo.

invariantemente positivo del coeficiente de la ecuación (36'), determina una pendiente positiva para la línea de fase $\dot{k} = 0$. Dados los signos de estos coeficientes, en todos los puntos situados por encima y a la izquierda de la línea de fase $\dot{k} > 0$, mientras que por debajo y a la derecha $\dot{k} < 0$. Por otra parte, seguimos teniendo el coeficiente de la ecuación (37') definido positivo junto con el coeficiente de la ecuación (38') indeterminado, dependiendo del signo de $(\beta + \delta - i)$.

Esta indeterminación se traslada a la pendiente de la línea de fase $\dot{\lambda} = 0$. Ahora bien, si evaluamos esta pendiente en el punto de equilibrio, donde $\beta + \delta - i^* = \beta - n > 0$, se obtiene una pendiente inequívocamente negativa.

$$(40''') \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\lambda=0, \dot{k}=0} = \frac{(m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}) \cdot f'' \cdot u^{*2}}{(\beta - n) \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21} - m_{11} \cdot f'' \cdot k^*) - f'' \cdot u^* \cdot m_{21} \cdot k^*} < 0$$

(Gráfico 6)

Estos resultados correspondientes al tercer, y último, caso los hemos plasmado en el gráfico 6. De nuevo se obtiene un equilibrio único con propiedades dinámicas de punto de silla²¹, en el cual las trayectorias convergentes son semejantes cualitativamente a las consideradas en los dos casos anteriores. De nuevo nos encontramos que si el valor inicial de k se encuentra por debajo del de equilibrio, a lo largo de la senda de convergencia dicho valor aumentará mientras que el valor de λ , situado inicialmente por arriba del de equilibrio, disminuirá. En relación al comportamiento dinámico transicional de las variables de control se reproduce el patrón obtenido bajo el supuesto extremo del caso anterior. A medida que k aumenta y λ disminuye, la tasa de inversión i disminuye, la tasa de depreciación δ aumenta y la tasa de utilización u disminuye. Estas conclusiones se obtienen después de comprobar que los resultados $\partial \delta / \partial k > 0$ y $\partial u / \partial \lambda > 0$, contribuyen a potenciar los efectos sobre δ y u obtenidos en el caso anterior cuando m_{12} se anulaba. No obstante, por lo que respecta a la variable producción *per capita* las cosas no aparecen tan nítidas como antes. Ahora, el nuevo resultado $\partial y / \partial \lambda > 0$ provoca un movimiento compensatorio sobre la producción, dejando el efecto neto indeterminado. El consumo *per capita* aumenta, a lo largo de la senda de convergencia, de una manera inequívoca.

²¹ En la situación representada en el gráfico 6 obtenemos que el determinante de la matriz jacobiana es negativo, $\text{Det}[J] = (-) \cdot (+) - (+) \cdot (+) < 0$. Los autovalores reales γ_1 y γ_2 son uno positivo y el otro negativo.

6. Conclusiones

En este artículo proponemos un modelo de crecimiento óptimo con costes de ajuste asociados a la inversión bruta y costes de mantenimiento del capital. Los costes de mantenimiento permiten reducir la depreciación de los bienes de capital. Nuestra especificación generaliza el modelo propuesto por Abel y Blanchard (1983) y proporciona un marco teórico para el análisis de dinámica comparativa en un cierto tipo de modelos de equilibrio general con subutilización del capital.

En nuestro modelo la solución del planificador central se caracteriza porque en el estado estacionario la tasa de inversión, la tasa de depreciación y la tasa de utilización del capital se determinan simultánea y endógenamente. Por tanto, no existe la posibilidad de resolver por bloques, a partir de una tasa de depreciación constante y exógena $\bar{\delta}$, las ecuaciones que describen el equilibrio económico.

Uno de los principales resultados es que en el equilibrio a largo plazo la economía no utiliza plenamente el capital instalado. Existe, por tanto, una subutilización óptima y eficiente del capital. Un segundo resultado es que, dada la relación que se establece entre la tasa de inversión y la tasa de depreciación, se hace necesaria una redefinición de las tradicionales *golden rule* y *modified golden rule*. Por ello introducimos las que hemos denominado *delta golden rule* y *delta modified golden rule*, con una estructura formal semejante a las del modelo de Ramsey pero mucho más ricas en contenido. Además, los resultados obtenidos nos permiten caracterizar la situación de estado estacionario como una situación dinámicamente eficiente, y al mismo tiempo aumentar las propiedades del mismo. Ahora nos encontramos con que pequeñas variaciones en los parámetros correspondientes a las funciones de costes de ajuste y/o de mantenimiento, pueden provocar diferencias importantes en la definición del propio estado estacionario. Desde este punto de vista, no es preciso suponer grandes desviaciones en cuanto a los comportamientos demográficos, de preferencias, y tecnológicos entre los países para justificar la necesidad de estudiar la convergencia condicional frente a la absoluta.

El equilibrio tiene estructura de punto de silla, por lo que el sistema converge hacia el equilibrio a lo largo de su única trayectoria óptima dinámicamente eficiente, con un aumento continuado de k acompañado de la disminución de λ . En el corto plazo, bajo el supuesto de que m_{12} es nula o positiva, la tasa de inversión disminuye, la tasa de depreciación aumenta y la tasa de utilización del capital

disminuye. En cambio, bajo el supuesto de m_{12} negativa, la tasa de depreciación y la tasa de utilización presentan un comportamiento ambiguo. El efecto neto depende, en cada caso, de la importancia relativa de las variaciones de k y λ . Por lo que respecta a la producción y el consumo *per capita*, en general, ambas aumentan a lo largo de la trayectoria convergente, aunque esta evolución se manifiesta de manera inequívoca sólo en el caso en que se supone $m_{12}=0$, mientras que la evolución del consumo es incierta bajo el supuesto $m_{12}<0$, y la de la producción lo es cuando $m_{12}>0$. Podemos concluir, pues, señalando que a lo largo de la senda de convergencia el capital, la producción y el consumo *per capita* presentan correlación positiva, mientras que la tasa de inversión aparece inversamente relacionada con las anteriores. La tasa de depreciación y la tasa de utilización, en cambio, ofrecen un comportamiento menos definido.

El conjunto de estos resultados ofrecen un marco teórico para la discusión de hipótesis alternativas a partir de la evidencia empírica. Las marcadas diferencias que ofrece nuestro modelo frente al modelo básico pueden servir de estímulo para la contrastación de nuevas hipótesis. Por otra parte, aún cuando hemos formulado un modelo dinámico absolutamente determinista, ciertas particularizaciones del análisis que aquí desarrollamos pueden servir de marco teórico para la implementación empírica de modelos de crecimiento estocástico de equilibrio general.

Referencias Bibliográficas

- Abel, A. B. and O. J. Blanchard, (1983), An Intertemporal Model of Saving and Investment, *Econometrica*, 51 (3), 675-692.
- Bischoff, C. W. and E. C. Kokkelenberg, (1987), Capacity Utilization and Depreciation-in-Use, *Applied Economics*, 19, 995-1007.
- Burnside, C. and M. Eichenbaum, (1994), Factor Hoarding and the Propagation of Business Cycle Shocks, *NBER Working Paper* num. 4675, NBER, Cambridge, USA.
- Epstein, L. and M. Denny, (1980), Endogenous Capital Utilization in a Short-Run Production Model, *Journal of Econometrics*, 12, 189-207.
- Escribá-Pérez, F. J. and J. R. Ruiz-Tamarit, (1996), Maintenance Costs and Endogenous Depreciation, *Revista Española de Economía*, 13 (2), 261-277.
- Kurz, M., (1968), The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes, *Review of Economic Studies*, 35, 155-174.

Licandro, O. and L. A. Puch, (1995), Capital Utilization, Maintenance Costs and the Business Cycle, *Fedea*, Documento de Trabajo # 9516.

Licandro, O., L. A. Puch y J. R. Ruiz-Tamarit, (1996), Utilización del Capital y Ciclo Económico Español, *Moneda y Credito* (Segunda Epoca), 202, 241-278.

Motahar, E., (1992), Endogenous Capital Utilization and the q Theory of Investment, *Economics Letters*, 40, 71-75.

Ruiz-Tamarit, J. R., (1995), Dépréciation Endogène et Sous-Utilisation du Capital, *IRES Discussion Paper* 9526, Institut de Recherches Economiques et Sociales, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.

Seierstad, A. and K. Sydsaeter, (1987), *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North Holland Publishing Co., Amsterdam.

Uzawa, H., (1964), Optimal Growth in a Two Sector Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies*, 31, 1-24.

Uzawa, H., (1968), Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings, in: J. N. Wolfe ed., *Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks*, The University of Edingburgh Press, 485-504.

Gráfico 1.

El estado estacionario de las variables de control.

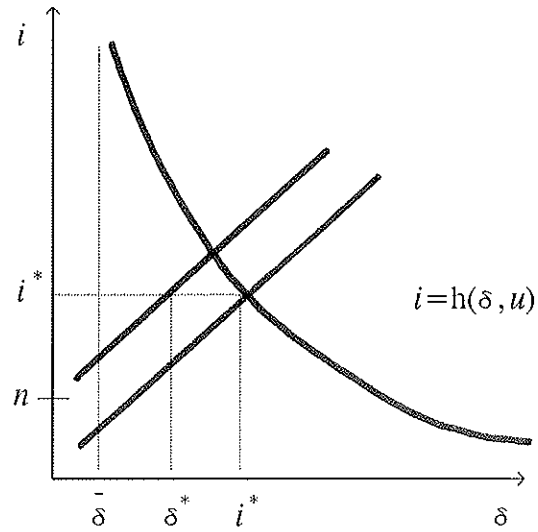


Gráfico 2.

El diagrama de fase (I).

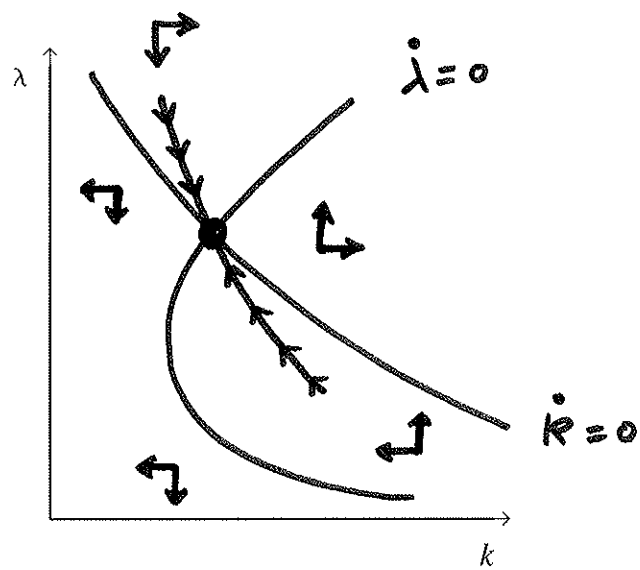


Gráfico 3.

El diagrama de fase (II): los equilibrios múltiples.

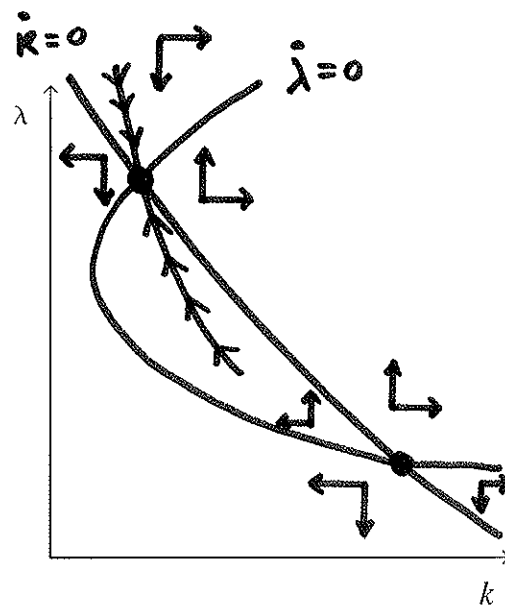


Gráfico 4.

El diagrama de fase (III).

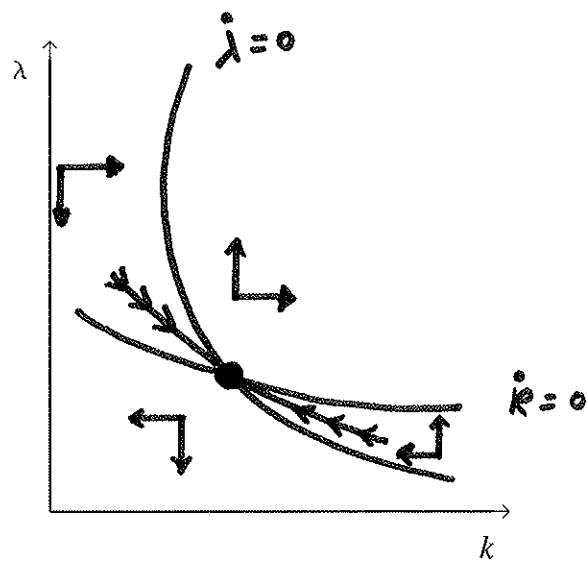


Gráfico 5.

El diagrama de fase cuando $m_{12}=m_{21}=0$.

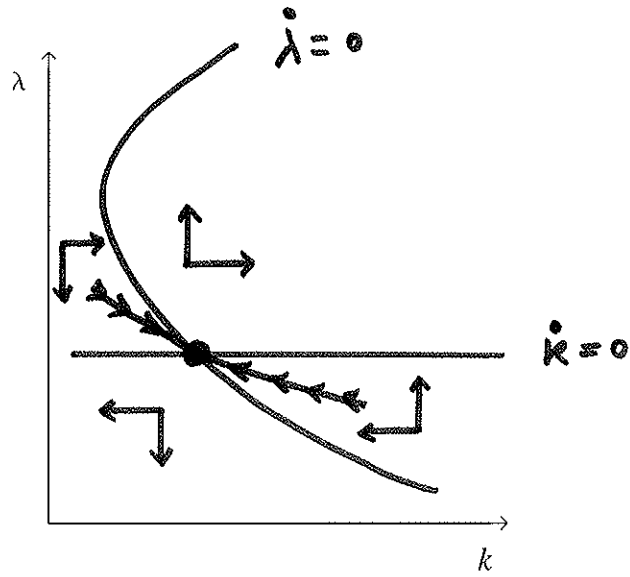
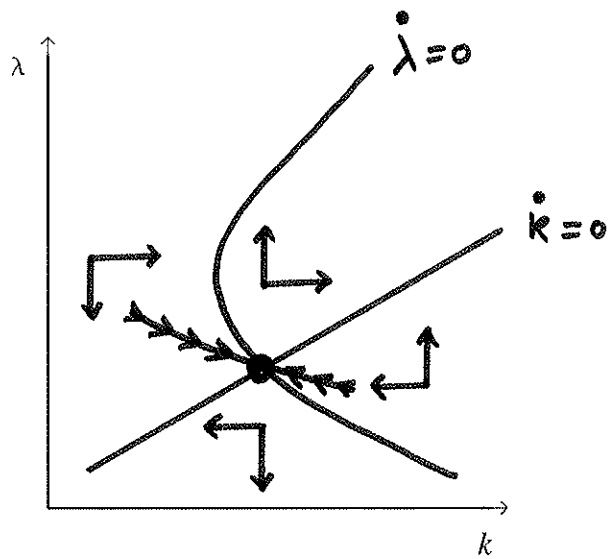


Gráfico 6.

El diagrama de fase cuando $m_{12}=m_{21}>0$.



RELACION DE DOCUMENTOS DE FEDEA

COLECCION RESUMENES

- 98-01: "Negociación colectiva, rentabilidad bursátil y estructura de capital en España", **Alejandro Inurrieta**.

TEXTOS EXPRESS

- 99-02: "Economic implications of the demographic change in Spain: Call for research", **Namkee Ahn**.
99-01: "Efectos macroeconómicos de la finalización de las ayudas comunitarias", **Simón Sosvilla-Rivero y José A. Herce**.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

- 99-18: "Crecimiento óptimo, depreciación endógena y subutilización del capital", **Omar Licandro, Luis A. Puch y J. Ramón Ruiz Tamarit**.
99-17: "Panel data and tourism demand. The case of Tenerife", **F. J. Ledesma-Rodríguez, M. Navarro-Ibáñez y J. V. Pérez-Rodríguez**.
99-16: "Redistribution in the Spanish pension system: An approach to its life time effects", **Joan Gil y Guillem López-Casasnovas**.
99-15: "The plutocratic bias in the CPI: Evidence from Spain", **Javier Ruiz Castillo, Eduardo Ley y Mario Izquierdo**.
99-14: "Local responses to a global monetary policy: The regional structure of financial systems", **Juan J. de Lucio y Mario Izquierdo**.
99-13: "The importance of the embodied question revisited", **Raouf Boucekkine, Fernando del Río y Omar Licandro**.
99-12: "Convergencia en tasas de inflación en la Unión Europea", **Irene Olloqui y Simón Sosvilla-Rivero**.
99-11: "Provisión óptima de suelo urbano para usos no lucrativos. El valor de las zonas verdes", **Pere Riera**.
99-10: "Liberalización del mercado del suelo. Rigideces y competencia en el sistema urbanístico español", **Pere Riera**.
99-09: "A note on the changing relationship between fertility and female employment rates in developed countries", **Namkee Ahn y Pedro Mira**.
99-08: "The future of pension systems in Europe. A reappraisal", **Michele Boldrin, Juan José Dolado, Juan F. Jimeno y Franco Peracchi**.
99-07: "On the profitability of technical trading rules based on artificial neural networks: Evidence from the Madrid stock market", **Fernando Fernández-Rodríguez, Christian González-Martel y Simón Sosvilla-Rivero**.
99-06: "Job bust, baby bust: The Spanish case", **Namkee Ahn y Pedro Mira**.
99-05: "Technical analysis in the Madrid stock exchange", **Fernando Fernández-Rodríguez, Simón Sosvilla-Rivero y Julián Andrada-Félix**.
99-04: "Convergencia en precios en las provincias españolas", **Irene Olloqui, Simón Sosvilla-Rivero, Javier Alonso**.